LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES 2020 CORRIGÉ – BARÈME	
BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques	E, F, G	*Durée de l'épreuve :* 140 minutes *Date de l'épreuve :* 18/09/2020

Partie obligatoire (40 points)

Question 1 (8 points)

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x - \frac{y+2}{5} - \frac{z+3}{4} = -1 \\ -5x - y = -2z \\ 5(x-y) + 2(z+y) = 5(z-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50x - 4y - 5z = 3 & (1) \\ 5x + y - 2z = 0 & (2) \\ 5x - 3y - 3z = -15 & (3) \end{cases}$$

$(2): y = -5x + 2z \quad (2')$

$(2')\ dans\ (1): 70x - 13z = 3 \quad (1')$

$(2')\ dans\ (3): 20x - 9z = -15 \ \Leftrightarrow z = \frac{5}{3} + \frac{20}{9}x \quad (3')$

$(3')\ dans\ (1'): x = \frac{3}{5}\ (4)$

$(4)\ dans\ (3'): z = \frac{5}{3} + \frac{20}{9} \cdot \frac{3}{5} = 3 \ (5)$

$(4), (5)\ dans\ (2'): y = -5 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot 3 = 3$ $\qquad S = \left\{\left(\frac{3}{5}; 3; 3\right)\right\}$

Question 2 (13 points)

Soit x le nombre de casques modèle *classique* et y le nombre de casques modèle *hors-piste*. Il faut résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ y \ge 0 \\ 100x + 100y \le 1000 \\ 100x + 300y \le 1800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 10 \\ x + 3y \le 18 \end{cases}$$

$[16h\ 40min = 1000min]$

On trace les droites suivantes dans un repère :

$d_1 \equiv x = 0$

$d_2 \equiv x = 8$

$d_3 \equiv y = 0$

$d_4 \equiv x + y = 10 \Leftrightarrow d_4 \equiv \ y = -x + 10$

$d_5 \equiv x + 3y = 18 \Leftrightarrow d_5 \equiv \ y = -\frac{1}{3}x + 6$

Prenons le point-test $A(1; 1)$:

$0 \leq 1$ vrai donc A appartient au demi-plan $x \geq 0$

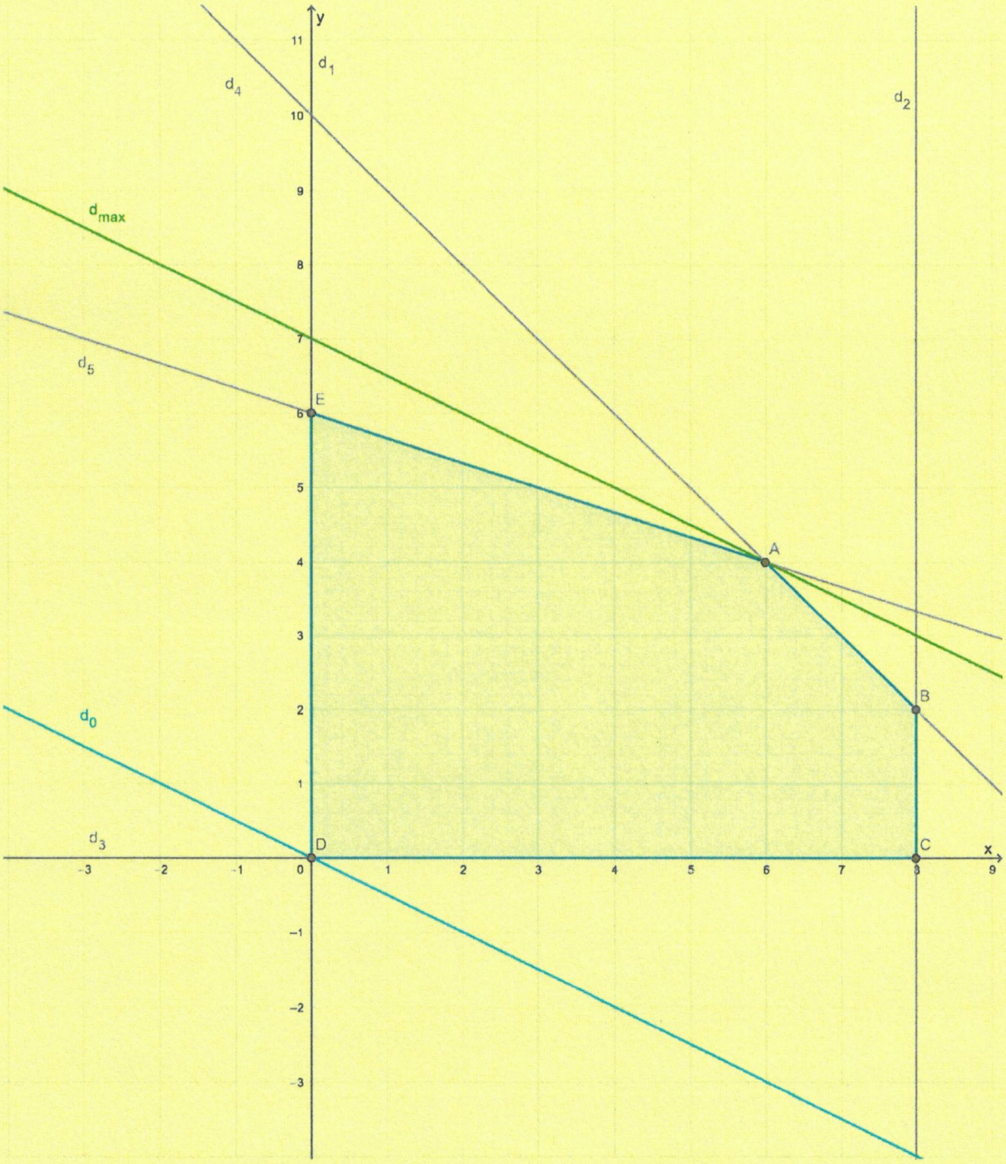
$1 \leq 8$ vrai donc A appartient au demi-plan $x \leq 8$

$1 \geq 0$ vrai donc A appartient au demi-plan $y \geq 0$

$1 + 1 \leq 10$ vrai donc A appartient au demi-plan $x + y \leq 10$

$1 + 3 \leq 18$ vrai donc A appartient au demi-plan $x + 3y \leq 18$

Polygone des contraintes :



Recette : $R(x; y) = 100x + 200y$

Droite de départ : $d_0 \equiv 100x + 200y = 0 \Leftrightarrow d_0 \equiv y = -\frac{1}{2}x$.

La droite d_{max} parallèle à d_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est le plus éloigné de l'origine passe par le sommet A. Donc, on voit que le bénéfice est maximal pour $A(6; 4)$.

Vérification par calcul : $\begin{cases} y = -x + 10 & (1') \\ y = -\frac{1}{3}x + 6 & (2') \end{cases}$

$(1')$ dans $(2')$: $\quad -x + 10 = -\frac{1}{3}x + 6 \Leftrightarrow x = 6$

Dans $(1')$: $y = -6 + 10 = 4$

Sous les contraintes données, la recette est donc maximale en fabricant 6 casques modèle *classique* et 4 casques modèle *hors-piste*.

$$100 \cdot 6 + 200 \cdot 4 = 1400$$

La recette maximale s'élève à 1400€.

Question 3 (4+3+2=9 points)

1) $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 12x + 5$

$f'(x) = -4x^2 + 8x + 12$

Racines de f' $\quad \Delta = 64 + 192 = 256 \quad x_1 = \frac{-8+16}{-8} = -1 \quad x_2 = \frac{-8-16}{-8} = 3$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{5}{3}$ min	$\nearrow$	max 41	$\searrow$	

2) $f''(x) = -8x + 8$

Racine de f'' $\quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tableau de concavité

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
C_f		$\cup$	$\frac{59}{3}$ $P.I.$	$\cap$	

3) $t_1 \equiv y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $\quad$ avec $\quad f(1) = \frac{59}{3}$ et $f'(1) = 16$

Donc $t_1 \equiv y = 16x + \frac{11}{3}$

Question 4 (3+3+(2+2)=10 points)

1) a) $7 - 4 \cdot 2^{3x+1} = 4 + 3 \cdot 2^{3x+1}$

$\Leftrightarrow 7 \cdot 2^{3x+1} = 3$

$\Leftrightarrow 2^{3x+1} = \frac{3}{7}$

$\Leftrightarrow 2^{3x+1} = 2^{\log_2 \frac{3}{7}}$

$\Leftrightarrow 3x + 1 = \log_2 \frac{3}{7}$

$\Leftrightarrow 3x = \log_2 \frac{3}{7} - 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\log_2 \frac{3}{7} - \frac{1}{3}$ $\qquad S = \left\{\frac{1}{3}\log_2 \frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right\}$

b) $5\log_3(2-x) - 8 = 6 - 2\log_3(2-x)$

$\Leftrightarrow 7\log_3(2-x) = 14$

$\Leftrightarrow \log_3(2-x) = 2$

$\Leftrightarrow \log_3(2-x) = \log_3 3^2$

$\Leftrightarrow 2 - x = 9$

$\Leftrightarrow x = -7$ $\qquad S = \{-7\}$

2) a) $\log\frac{b^2}{a^3} = \log b^2 - \log a^3 = 2\log b - 3\log a = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 = -13$

b) $\log\sqrt{ab^2} = \frac{1}{2}(\log ab^2) = \frac{1}{2}(\log a + \log b^2) = \frac{1}{2}(\log a + 2\log b) = \frac{1}{2}(3-4) = -\frac{1}{2}$

Partie au choix (20 points)

Question 5 a ((1+3)+(2+3)=9 points)

1) a) $C_m(x) = \frac{100}{x} - 10 + x$

b) $C'_m(x) = -\frac{100}{x^2} + 1 = \frac{-100+x^2}{x^2}$

$$C'_m(x) = 0 \Leftrightarrow -100 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10 \text{ ou } \overbrace{x = -10}^{\text{à écarter}}$$

x	5	10	30
$C'_m(x)$	$-$	0	$+$
$C_m(x)$	$\searrow$	$\underset{min}{10}$	$\nearrow$

Le coût unitaire moyen est minimal pour la fabrication de 10 bodys.

Le coût unitaire moyen minimal vaut 100 €.

2) **a)** $B(x) = 30x - C(x) = 40x - 100 - x^2$

b) $B'(x) = 40 - 2x$

$B'(x) = 0 \Leftrightarrow 40 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow x = 20$

x	5		20		30
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$\nearrow$	$\overset{max}{300}$	$\searrow$	

Le bénéfice est maximal pour la fabrication de 20 bodys.

Le bénéfice maximal vaut 300 €.

<u>Question 5 b</u> (2+3+(2+2)=9 points)

1) Soit A l'évènement ≪ obtenir exactement deux boules blanches ≫

$$p(A) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3 \cdot 21}{210} = \frac{3}{10}.$$

2) Soit B l'évènement ≪ obtenir au moins 2 boules rouges ≫, donc $\bar{B}$ est l'évènement ≪ obtenir aucune boule rouge ou obtenir 1 boule rouge ≫.

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{A_6^3 + A_4^1 \cdot A_6^2}{A_{10}^3} = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8} = 1 - \frac{240}{720} = \frac{2}{3}.$$

3)

a) Soit C l'évènement ≪ obtenir trois boules de la même couleur ≫

$$p(C) = \frac{2^3 + 3^3 + 4^3 + 1^3}{10^3} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}.$$

b) Soit D l'évènement ≪ obtenir une boule mauve et 2 boules blanches ≫

$$p(D) = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot 1}{10^3} = \frac{3}{250}.$$

<u>Question 6 a</u> ((1+3) + (3+2+2)=11 points)

1) **a)** $C(t) = 20000 \cdot (1 + 0{,}8\%)^t = 20000 \cdot 1{,}008^t$

b) $C(t) = 20000 \cdot (1 + 10\%)$

$\Leftrightarrow 20000 \cdot 1{,}008^t = 22000$

$\Leftrightarrow 1{,}008^t = \frac{11}{10}$

$\Leftrightarrow t = \log_{1.008} \frac{11}{10} \approx 11{,}96$

Après 12 années, le capital aura augmenté de 10%.

2)

a)

	Section E	Section F	Section G	Totaux
Filles	28%	10%	12%	50%
Garçons	12%	15%	23%	50%
Totaux	40%	25%	35%	100%

b) $p(Fille|section\ F) = \frac{10\%}{25\%} = \frac{2}{5}$

c) $p(Garçon\ non\ E) = \frac{15\%+23\%}{100\%} = \frac{19}{50}$

Question 6 b (4+(4+3)=11 points)

1) $f(x) = \frac{-2}{7x+3}$

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\frac{-2}{7(-1+h)+3} - \frac{-2}{7(-1)+3}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-2}{7h-4} - \frac{1}{2}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-4-(7h-4)}{2(7h-4)}}{h}$$

$$= \frac{-7h}{2h(7h-4)}$$

$$= \frac{-7}{2(7h-4)}$$

Donc en remplaçant h par 0, on obtient $f'(-1) = \frac{7}{8}$.

2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1$ et $d \equiv y = -2x - 3$

a) $f'(x) = x^2 - 4x + 1$

Or $t_a \equiv y = f'(a)(x-a) + f(a)$

d est parallèle à t_a si et seulement si les pentes des deux droites sont égales.

$f'(a) = -2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 1 = -2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1\ ou\ a = 3$ [Δ= 4]

Ainsi les abscisses cherchées sont 1 et 3.

b) $t_1 \equiv y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow t_1 \equiv y = -2(x-1) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow t_1 \equiv y = -2x + \frac{7}{3}$

$t_3 \equiv y = f'(3)(x-3) + f(3) \Leftrightarrow t_3 \equiv y = -2(x-3) - 5 \Leftrightarrow t_1 \equiv y = -2x + 1$