Mathématiques
16 septembre 2019

Question 1 (8pts) :

$$\begin{cases} 5+x+3z & =-2y \\ 2(x-3)+2y-\frac{1}{2}(12-2x+6z) & =5 \\ \frac{3x}{2}-\frac{z+y}{4}-\frac{4+3x}{3} & =\frac{1}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+3z & =-5 \\ 2x-6+2y-6+x-3z & =5 \\ 18x-3z-3y-16-12x & =2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y+3z & =-5 & (E1) \\ 3x+2y-3z & =17 & (E2)|3(E1)-(E2) \\ 2x-y-z & =6 & (E3)|2(E1)-(E3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y+3z & =-5 & (E1) \\ 4y+12z & =-32 & (E2) \\ 5y+7z & =-16 & (E3)|5(E2)-4(E3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y+3z & =-5 & (E1) \\ 4y+12z & =-32 & (E2) \\ 32z & =-96 & (E3) \end{cases}$$

$(E3): 32z=-96 \iff z=-3$

$(E2): 4y-36=-32 \iff y=1$

$(E3): x+2-9=-5 \iff x=2$

$$S=\{(2;1;-3)\}$$

Question 2 (12pts) :

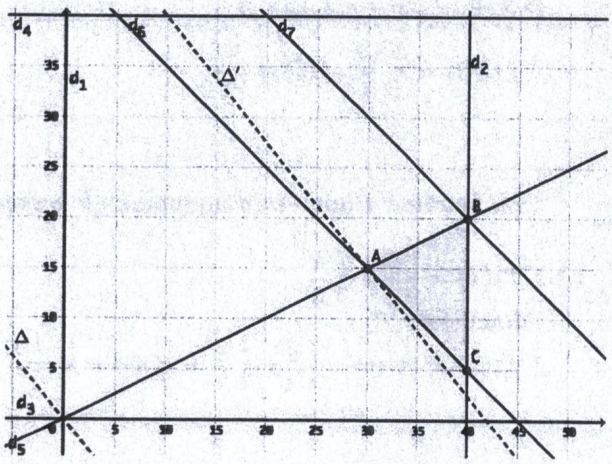
Inconnues :
x : nombre d'heures hebdomadaires de Martine
y : nombre d'heures hebdomadaires de Thomas
Mise en inéquations :

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 40 \\ 0\leqslant y\leqslant 40 \\ x\geqslant 2y \\ 45\leqslant x+y\leqslant 60 \end{cases}$$

Posons :

$d_1: x=0$
$d_2: x=40$
$d_3: y=0$
$d_4: y=40$
$d_5: y=\frac{1}{2}x$
$d_6: x+y=45 \iff d_6: y=-x+45$
$d_7: x+y=60 \iff d_7: y=-x+60$

Représentons le polygone des contraintes :



La fonction « salaire hebdomadaire » est donnée par : $f(x;y)=20x+16y$

Posons :

$$\Delta\colon 20\,x + 16\,y = 0 \iff \Delta\colon y = -\frac{5}{4}x$$

Δ' est la droite parallèle à Δ qui passe par le point $A(30;15)$.
Vérification algébrique de ces coordonnées :

$$\begin{aligned}
A(x,y) \in d_5 \cap d_6 &\iff \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -x + 45 \end{cases} \\
&\iff \frac{1}{2}x = -x + 45 \\
&\iff 3x = 90 \\
&\iff x = 30 \\
&\text{et } y = -30 + 45 = 15
\end{aligned}$$

Conclusion :
Le salaire hebdomadaire est donc minimal si Martine travaille pendant 30 heures et Thomas travaille pendant 15 heures.
$f(30;15) = 20 \cdot 30 + 16 \cdot 15 = 840$€

Question 3 (5+3+3+3=14pts) :

$f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 2x + 1$

a) $f'(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$
Racines de f' :
$f'(x) = 0 \iff -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$
$\Delta = 1 \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 3$

$f(-2) = -\frac{13}{9}$ et $f(3) = \frac{11}{2}$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	min $-\frac{13}{9}$	↗	max $\frac{11}{2}$	↘	

La fonction f admet un minimum en le point $\left(-2;-\frac{13}{9}\right)$ et un maximum en le point $\left(3;\frac{11}{2}\right)$.

b) $f''(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
Racine de f'' :
$f''(x) = 0 \iff -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

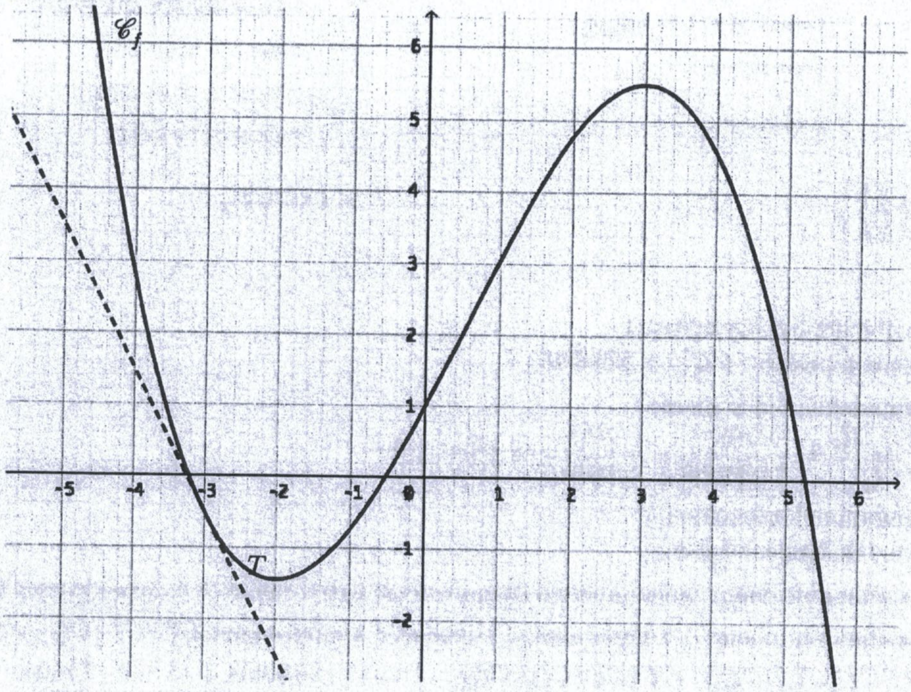
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{C}_f$		$\smile$	P.I.	$\frown$	

La fonction f admet un point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{73}{36}\right)$.

c) L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est donnée par :

$$\begin{aligned}T \equiv y &= f'(-3)(x-(-3))+f(-3)\\ y &= -2(x+3)-\frac{1}{2}\\ y &= -2x-\frac{13}{2}\end{aligned}$$

d) Representation graphique :



Question 4 (4pts) :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}\\ &= \frac{\frac{3}{1+4-2h}-\frac{3}{1+4}}{h}\\ &= \frac{\frac{3}{5-2h}-\frac{3}{5}}{h}\\ &= \frac{\frac{3\cdot 5-3\cdot(5-2h)}{5(5-2h)}}{h}\\ &= \frac{15-15+6h}{5h(5-2h)}\\ &= \frac{6h}{5h(5-2h)}\\ &= \frac{6}{5(5-2h)}\end{aligned}$$

Remplaçons h par 0 : $f'(-2)=\frac{6}{5(5-2\cdot 0)}=\frac{6}{25}$

Question 5 (3+3=6pts) :

a)

$$\begin{aligned} & 8-5\cdot 2^{5x+1} = -3\cdot 2^{5x+1} \\ \iff\ & 2\cdot 2^{5x+1} = 8 \\ \iff\ & 2^{5x+1} = 4 \\ \iff\ & 5x+1 = \log_2 4 \\ \iff\ & 5x+1 = 2 \\ \iff\ & x = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$

b) C.E : $1-x>0 \iff x<1$
$D =]-\infty; 1[$

$$\begin{aligned} & 2\log_3(1-x)-5 = 10-\log_3(1-x) \\ \iff\ & 3\log_3(1-x) = 15 \\ \iff\ & \log_3(1-x) = 5 \\ \iff\ & 1-x = 3^5 \\ \iff\ & 1-x = 243 \\ \iff\ & x = -242 \end{aligned}$$

$S = \{-242\}$

Question 6 (2+3+3=8pts) :
nombre de cas possible : $C_{52}^5 = 2\,598\,960$

a) p(uniquement des piques)
$= \dfrac{C_{13}^5 \cdot C_{39}^0}{C_{52}^5} = \dfrac{1287\cdot 1}{2\,598\,960} = \dfrac{33}{66\,640} \approx 4,95\cdot 10^{-4}$

b) p(une dame et un coeur)
Il faut distinguer les cas :

- dame de coeur, aucune autre dame, aucun autre coeur et 4 autres cartes $C_1^1 \cdot C_3^0 \cdot C_{12}^0 \cdot C_{36}^4$
- dame non coeur, 1 autre dame, 1 coeur et 3 autres cartes $C_1^0 \cdot C_3^1 \cdot C_{12}^1 \cdot C_{36}^3$

$= \dfrac{C_1^1 \cdot C_3^0 \cdot C_{12}^0 \cdot C_{36}^4}{C_{52}^5} + \dfrac{C_1^0 \cdot C_3^1 \cdot C_{12}^1 \cdot C_{36}^3}{C_{52}^5} = \dfrac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 58\,905 + 1\cdot 3\cdot 12\cdot 7\,140}{2\,598\,960}$
$= \dfrac{315\,945}{2\,598\,960} = \dfrac{177}{1456} \approx 0,12$

c) p(au moins un trèfle) $= 1-$p(aucun trèfle)$= 1-\dfrac{C_{13}^0\cdot C_{39}^5}{C_{52}^5} = 1-\dfrac{575\,757}{2\,598\,960} = \dfrac{7411}{9520} \approx 0,78$

Question 7 (2+3+3=8pts) :

a) $A_{10}^6 = 151\,200$ On a 151.200 cas possibles.

b) $1\cdot 10^4\cdot 1 = 10\,000$ On a 10.000 cas possibles.

c) 4 (chiffres pairs différents de 0) ·
5 (chiffres impairs) ·
7 (chiffres différents des deux premiers chiffres et différent de 0) ·
6 (chiffres différents des trois premiers chiffres et différent de 0) ·
5 (chiffres différents des quatre premiers chiffres et différent de 0) ·
1 (chiffre 0)
= 4200
On a 4200 cas possibles.