Corrigé modèle

I. Choix des inconnues

x : le prix unitaire des billets d'entrée
y : le prix unitaire des porte-clés
z : le prix unitaire des guides

Mise en équation et résolution

$$\begin{cases} 17x + 3y + 5z = 237 & (E_1) \\ 12x + 9y + 0z = 135 & (E_2) \mapsto 17 \cdot (E_2) - 12 \cdot (E_1) \\ 26x + 12y + 10z = 444 & (E_3) \mapsto 17 \cdot (E_3) - 26 \cdot (E_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17x + 3y + 5z = 237 & (E_1) \\ 117y - 60z = -549 & (E'_2) \\ 126y + 40z = 1'386 & (E'_3) \mapsto 117(E'_3) - 126 \cdot (E'_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17x + 3y + 5z = 237 & (E_1) \\ 117y - 60z = -549 & (E'_2) \\ 12'240z = 231'336 & (E''_3) \end{cases}$$

De $(E''_3) : z = 18{,}90$
Dans $(E'_2) : 117y = 585 \Leftrightarrow y = 5$
Dans $(E_1) : 17x = 127{,}5 \Leftrightarrow x = 7{,}50$

Le prix unitaire d'un billet d'entrée est de 7,50 €.
Le prix unitaire d'un porte-clé est de 5 €.
Le prix unitaire d'un guide est de 18,90 €.

(1 + 10 + 1 = 12 points)

II. Il faut tracer les droites correspondantes dans un repère orthonormé.

- La première inéquation est associée à la droite d'équation $x - 2 = 0$, ce qui est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- La deuxième inéquation est associée à la droite $d_1 \equiv -x + 2y - 4 = 0$, d'équation réduite $d_1 \equiv y = \frac{1}{2}x + 2$.

  Tableau des valeurs de d_1 :

x	0	2	6	10
y	2	3	5	7

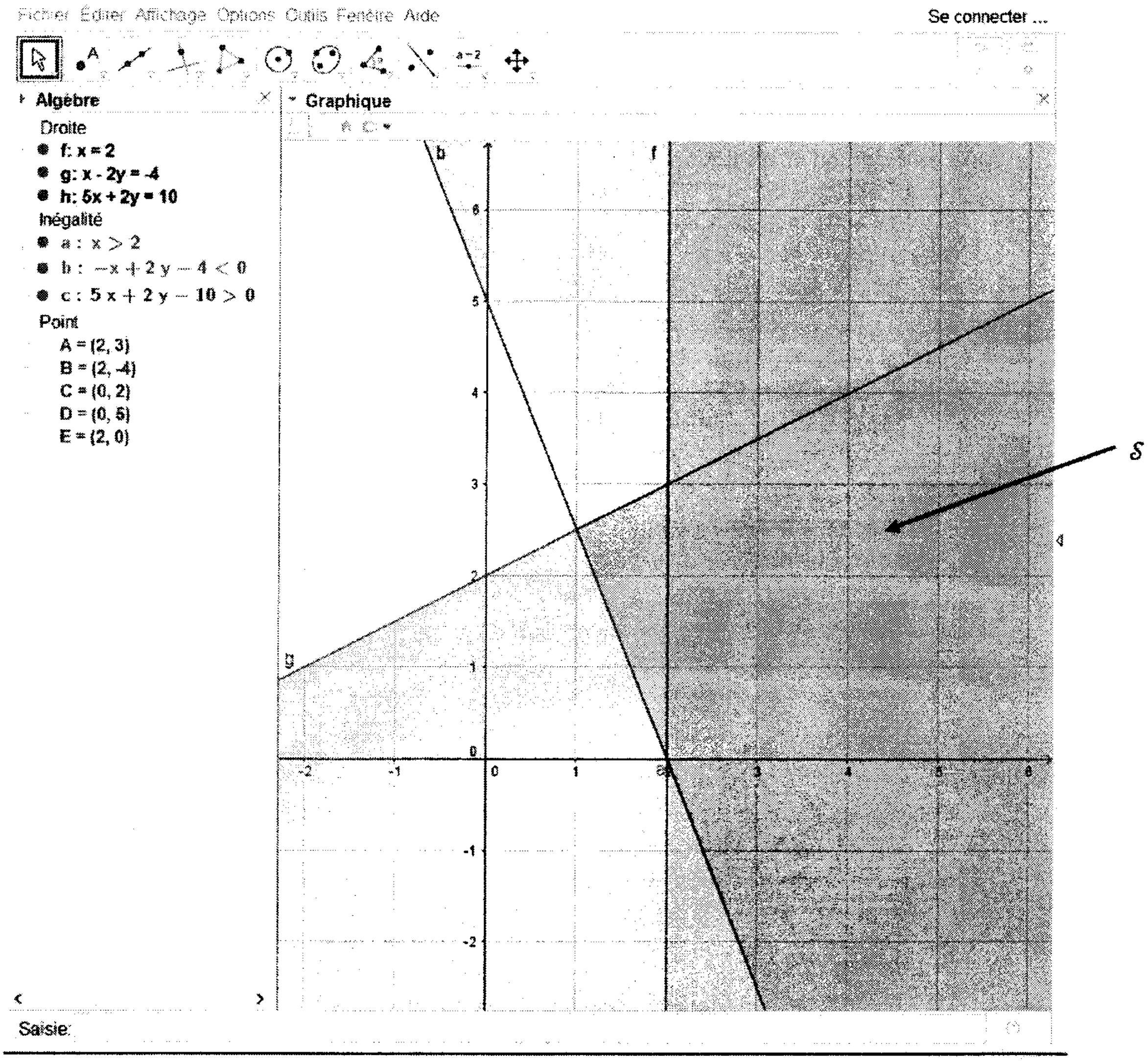
  Nous posons $f_1(x,y) = -x + 2y - 4$ et nous remplaçons les coordonnées d'un point du plan. Nous choisissons l'origine : $f_1(0;0) = -4 < 0$. Le demi-plan qui renferme l'origine est celui qui vérifie l'inéquation en question.
- La troisième inéquation est associée à la droite $d_2 \equiv 5x + 2y - 10 = 0$, d'équation réduite $d_2 \equiv y = -\frac{5}{2}x + 5$.

  Tableau des valeurs de d_2 :

x	0	2	4	6
y	5	0	-5	-10

  Nous posons $f_2(x,y) = 5x + 2y - 10$ et nous remplaçons les coordonnées d'un point du plan. Nous choisissons l'origine : $f_2(0;0) = -10 < 0$. Le demi-plan qui ne renferme pas l'origine est celui qui vérifie l'inéquation en question.

Représentation graphique



(1 + 2 + 2 + 5 = 10 points)

III. 1) $f'(x) = -6x^2 - 3x + 3$

racines : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 - 3x + 3 = 0$

$\Delta = 81, \sqrt{\Delta} = 9, x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-1/2$ min	$\nearrow$	MAX $23/8$	$\searrow$	

$f(-1) = -\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{8}$.

La fonction f admet un minimum en le point $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ et un maximum en le point $\left(\frac{1}{2}; \frac{23}{8}\right)$.

2) $f''(x) = -12x - 3$

racines : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.

Tableau de concavité :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
concavité		$\uparrow$	point d'inflexion	$\downarrow$	

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{16}$

La fonction f admet un point d'inflexion de coordonnées $\left(-\frac{1}{4}; \frac{19}{16}\right)$.

3) L'équation réduite de la tangente est donnée par

$$t_0 \equiv y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$t_0 \equiv y = 3x + 2$$

(7 + 5 + 2 = 14 points)

IV.

$$
\begin{aligned}
& 5 \cdot 4^{3-2x} - 3 = 3 \cdot 4^{3-2x} + 7 \\
\Leftrightarrow\quad & 2 \cdot 4^{3-2x} = 10 \\
\Leftrightarrow\quad & 4^{3-2x} = 5 \\
\Leftrightarrow\quad & 4^{3-2x} = 4^{\log_4(5)} \\
\Leftrightarrow\quad & 3 - 2x = \log_4(5) \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{3 - \log_4(5)}{2}
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{3 - \log_4(5)}{2}\right\}$$

(4 points)

V.

- Les représentations graphiques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ admettent des asymptotes horizontales, donc ce sont des représentations graphiques de fonctions exponentielles. $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ admettent des asymptotes verticales, donc ce sont des représentations graphiques de fonctions logarithmiques.
- Calculons : $f_1(3) = \log(3-2) + 3 = 3$, donc c'est le graphe $\mathcal{C}_3$.
- Calculons : $f_2(-2) = 10^0 - 1 = 0$, donc c'est le graphe $\mathcal{C}_1$.
- Calculons : $f_3(0) = \log(1) = 0$, donc c'est le graphe $\mathcal{C}_4$.
- Calculons : $f_4(1) = 10^0 + 3 = 4$, donc c'est le graphe $\mathcal{C}_2$.

(4 points)

VI. 6 à 50cts ; 7 à 1€ ; 8 à 2€ : au total 21 pièces

1) tirage simultané de trois pièces :
   nombre de cas possibles : C_{21}^3= 1330
   a) p(une pièce de chaque valeur) = $\frac{C_6^1 \cdot C_7^1 \cdot C_8^1}{C_{21}^3} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1330} = \frac{24}{95} \approx 0{,}2526$
   b) p(exactement une pièce de 1 €) = $\frac{C_7^1 \cdot C_{14}^2}{C_{21}^3} = \frac{7 \cdot 91}{1330} = \frac{91}{190} \approx 0{,}4789$
2) tirage sans remise et avec ordre de trois pièces :
   nombre de cas possibles : A_{21}^3= 7980
   p(exactement une pièce de 1 €) = $\frac{A_7^1 \cdot A_{14}^2}{A_{21}^3} \cdot 3 = \frac{7 \cdot 182}{7980} \cdot 3 = \frac{91}{190} \approx 0{,}4789$

(1.5 + 1.5 + 3 = 6 points)

VII.

1) Former des mots en utilisant toutes les lettres du mot « MAGIQUE » :
   permutations sur 7 éléments : 7 ! = 5040 cas possibles.
2) Choisir 5 cinq élèves dans une classe de 25 pour participer à une conférence :
   combinaisons de 5 élèves choisis parmi 25 : C_{25}^5 = 53'130 cas possibles
3) Former un code de cinq chiffres (différents ou non).

Arrangements à répétition de 5 éléments choisis parmi 10 : 10^5 = 100'000 cas possibles

4) Choisir un président, un trésorier et un secrétaire parmi les 15 membres d'un comité :

Arrangements de 3 personnes choisies parmi 15 : A_{15}^3 = 2'730 cas

(4*1,5 = 6 points)

VIII.

1) nombre de cas possibles : 6*6 = 36
   nombre de cas favorables : 5
   p(somme égale à 6) = $\frac{5}{36} \approx 0.1389$
2) p(somme supérieure ou égale à 10) = $\frac{3+2+1}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1667$
2) p(somme supérieure ou égale à 4) = 1 – p(somme strictement inférieure à 4)

$$1 - \frac{1+2}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12} \approx 0.9167$$

(3*2 = 6 points)
