Corrigé modèle

<u>Question 1</u> (6pts)

$$\begin{cases} 2x-2=y-3z \\ 3(x+y)-6=y-5(z+1) \\ 3+\frac{x}{6}-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}=\frac{11}{6} \quad \mid \cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=2 \\ 3x+3y-6=y-5z-5 \\ 18+x-3y-2z=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=2 & (1) \\ 3x+2y+5z=1 & (2) \to 3\cdot(1)-2\cdot(2) \\ x-3y-2z=-7 & (3) \longrightarrow (1)-2\cdot(3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=2 & (1) \\ -7y-z=4 & (2') \\ 5y+7z=16 & (3') \longrightarrow 5\cdot(2')+7\cdot(3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=2 & (1) \\ -7y-z=4 & (2') \\ 44z=132 & (3'') \end{cases}$$

$(3'') \Leftrightarrow 44z=132 \Leftrightarrow z=3$

$(2') \Leftrightarrow -7y-3=4 \Leftrightarrow -7y=7 \Leftrightarrow y=-1$

$(1) \Leftrightarrow 2x+1+9=2 \Leftrightarrow 2x=-8 \Leftrightarrow x=-4$

$$S=\{(-4;-1;3)\}$$

<u>Question 2</u> (12pts)

Soient x le nombre de lots A et y le nombre de lots B.

$$\begin{cases} 0 \le x \le 80 & (1) \\ 0 \le y \le 80 & (2) \\ 2x+3y \ge 90 & (3) \\ 4x+12y \ge 240 & (4) \\ 8x+6y \ge 240 & (5) \end{cases}$$

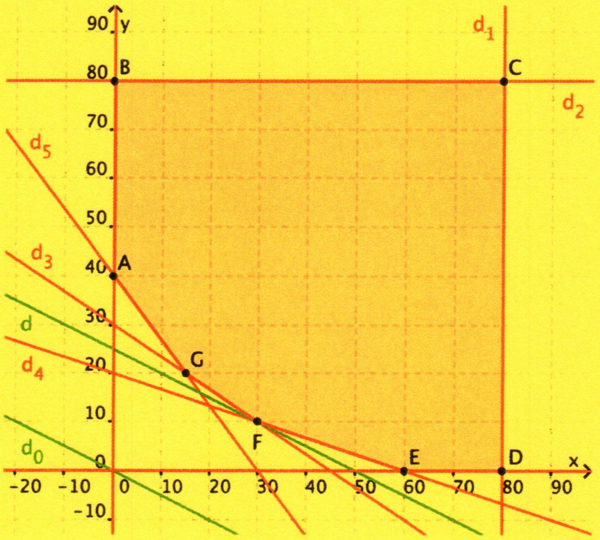
$d_1 \equiv x=80$

$d_2 \equiv y=80$

$d_3 \equiv 2x+3y=90 \Leftrightarrow d_3 \equiv y=-\frac{2}{3}x+30$

$d_4 \equiv 4x+12y=240 \Leftrightarrow d_4 \equiv y=-\frac{1}{3}x+20$

$d_5 \equiv 8x+6y=240 \Leftrightarrow d_5 \equiv y=-\frac{4}{3}x+40$



$(3): 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 90$ faux, donc $O(0; 0) \notin S_3$

$(4): 4 \cdot 0 + 12 \cdot 0 \geq 240$ faux, donc $O(0; 0) \notin S_4$

$(5): 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \geq 240$ faux, donc $O(0; 0) \notin S_5$

Dépense : $d(x) = 200x + 400y$

$$d_0 \equiv 200x + 400y = 0 \Leftrightarrow d_0 \equiv y = -\frac{1}{2}x$$

Sur le graphique, on voit que la dépense est minimale pour $F(30; 10) \in d$ où $d \parallel d_0$.

Vérification par calcul :

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 30 & (1') \\ y = -\frac{1}{3}x + 20 & (2') \end{cases}$$

$(1')$ dans $(2')$:

$$-\frac{2}{3}x + 30 = -\frac{1}{3}x + 20 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x = -10 \Leftrightarrow x = 30$$

Dans $(2'): y = -\frac{1}{3} \cdot 30 + 20 = 10$

La dépense est donc minimale si le gérant achète 30 lots A et 10 lots B.

$$200 \cdot 30 + 400 \cdot 10 = 6000 + 4000 = 10000$$

Cette dépense minimale vaut donc10000€.

Question 3 **(6+4+3+3+3=19pts)**

a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 4$

$f'(x) = -3x^2 + 10x - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{10+8}{6} = 3$

x	-∞		$\frac{1}{3}$		3		+∞
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	min $\frac{-121}{27}$ $\approx -4{,}48$	↗	max 5	↘	

Minimum en $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{121}{27}\right)$ et maximum en $B(3, 5)$

b) $f''(x) = -6x + 10$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
C_f	∪	P.I. $\frac{7}{27} \approx 0{,}26$	∩

Point d'inflexion en $I(\frac{5}{3}; \frac{7}{27})$

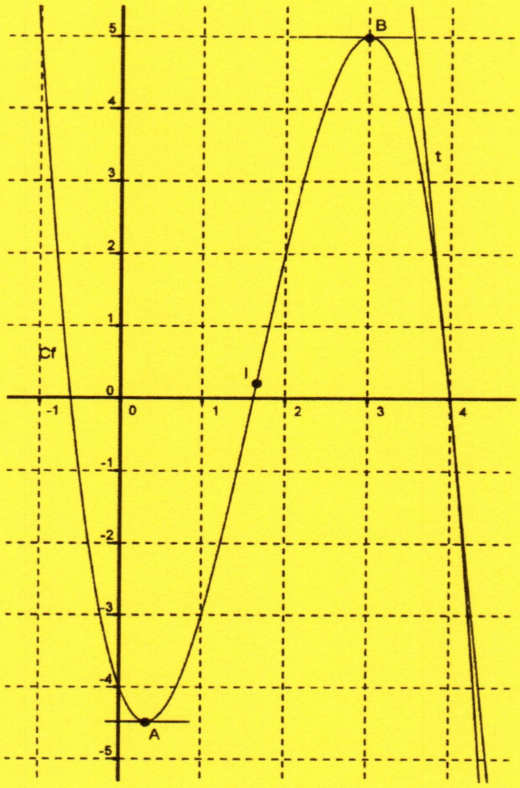
c) $f(4) = 0$; $f'(4) = -11$

$t \equiv y = -11x + p$

$(4; 0) \in t \Leftrightarrow 0 = -44 + p \Leftrightarrow p = 44$

D'où : $t \equiv y = -11x + 44$

d)



e) $f(0) = -4 < 0$ et $f(3) = 5 > 0$.

Sur [0 ; 3], la courbe de f n'a qu'un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses.

Il y a donc une seule valeur $a \in [0 ; 3]$ telle que $f(a) = 0$.

Question 4 **(3+3=6pts)**

a) $2 \cdot 5^{4x} - 9 = 6 - 5^{4x}$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 5^{4x} = 15$

$\Leftrightarrow 5^{4x} = 5$

$\Leftrightarrow 4x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

b) $11 = \log_3(5 - 2x) + 8$

$\Leftrightarrow \log_3(5 - 2x) = 3$

$\Leftrightarrow \log_3(5 - 2x) = \log_3 3^3$

$\Leftrightarrow 5 - 2x = 27$

$\Leftrightarrow -2x = 22$

$\Leftrightarrow x = -11$

$S = \{-11\}$

<u>Question 5</u> ((2+3)+(2+2)=9pts)

a) 1) $p(1\,jaune, 1\,blanche, 1\,mauve) = \frac{C_8^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1}{C_{15}^3} = \frac{96}{455}$

2) $p(1 jaune, 1\,blanche, 1\,mauve) = \frac{8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3!}{15 \cdot 15 \cdot 15} = \frac{64}{375}$

b) 1) $p(JJJJ, MMMM) = \frac{A_8^4 + A_4^4}{A_{15}^4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 2}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{1704}{32760} = \frac{71}{1365}$

2) $p(au\ moins\ 1\ mauve) = 1 - \frac{A_{11}^4}{A_{15}^4} = 1 - \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{69}{91}$

<u>Question 6</u> ((2+2)+2+2=8pts)

a) 1) $p(garçon) = \frac{92}{160} = \frac{23}{40}$

2) $p(fille\ et\ Dessin) = \frac{35}{160} = \frac{7}{32}$

b) $p(pas\ de\ Sport\ sachant\ fille) = \frac{35+21}{68} = \frac{56}{68} = \frac{14}{17}$

c) $p(garçon\ sachant\ Théâtre) = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$
