Examen de fin d'études secondaires 2013 – Mathématiques (sections E, F, G) – Corrigé

Exercice 1 **(6 points)**

Résoudre le système $(\mathcal{S})$ suivant, puis indiquer l'ensemble des solutions et donner une interprétation géométrique du résultat :

$$(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} 5x + 3y - 4z = -1 \\ x + y + 2z = 5 \\ -2x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

Par Substitution

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4z = -1 \\ x + y + 2z = 5 \\ -2x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y - 4z = -1 \\ x = -y - 2z + 5 \\ -2x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(-y - 2z + 5) + 3y - 4z = -1 \\ x = -y - 2z + 5 \\ -2(-y - 2z + 5) - y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 14z + 25 = -1 \\ x = -y - 2z + 5 \\ y + 7z - 10 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 14z + 25 = -1 \\ x = -y - 2z + 5 \\ y = -7z + 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(-7z + 13) - 14z + 25 = -1 \\ x = -(-7z + 13) - 2z + 5 \\ y = -7z + 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -1 \\ x = 5z - 8 \\ y = -7z + 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5z - 8 \\ y = -7z + 13 \\ z \text{ est libre} \end{cases}$$

Méthode du pivot de Gauss

Ecriture simplifiée du système $(\mathcal{S})$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - 5L_2 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -14 & -26 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 13 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + 2L_2 \\ L_2 \to L_2 - L_3 \\ L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -5 & -8 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 13 \end{array}\right. \quad \textit{équation auxiliaire vérifiée}$$

Le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système suivant:

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5z = -8 \\ y + 7z = 13 \\ z \text{ est libre} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5z - 8 \\ y = -7z + 13 \\ z \text{ est libre} \end{cases}$$

3p

En posant : $z = \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$, le système $(\mathcal{S})$ s'écrit :

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\gamma - 8 \\ y = -7\gamma + 13 \\ z = \gamma \end{cases} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$$

1p

D'où l'ensemble des solutions : $S = \{(5\gamma - 8; -7\gamma + 13; \gamma),\ \gamma \in \mathbb{R}\}$ 0,5p

<u>Interprétation géométrique :</u>

L'intersection de ces trois plans est une **droite passant par le point $A(-8; 13; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$**. 1,5p

Exercice 2 **(3+3+3=9 points)**

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2;0;-1)$ et $B(-1;3;2)$ ainsi que le plan π vérifiant les équations paramétriques : $\begin{cases} x = 3-\alpha+2\beta \\ y = \quad 2\alpha-\beta \\ z = 1-3\alpha+\beta \end{cases}$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan π.

Méthode 1

Eliminons les paramètres réels α et β :

$$\begin{cases} -\alpha+2\beta = x-3 \\ 2\alpha-\beta = y \\ -3\alpha+\beta = z-1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} L_1 \to L_1+2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \to L_3+L_2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = x+2y-3 \\ 2\alpha-\beta = y \\ -\alpha = y+z-1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \to 3L_3 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = x+2y-3 \\ 2\alpha-\beta = y \\ -3\alpha = 3y+3z-3 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} L_1 \to L_1+L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{0} = \boldsymbol{x+5y+3z-6} \\ 2\alpha-\beta = y \\ -3\alpha = 3y+3z-3 \end{cases}$$

D'où une équation cartésienne du plan π :

$\pi \equiv \boldsymbol{x+5y+3z-6=0}$ 4p.

Méthode 2

π est le plan passant par le point $P(3;0;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-1;2;-3)$ et $\vec{v}(2;-1;1)$

$M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}, \vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont coplanaires*

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{PM};\vec{u};\vec{v}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 2 \\ y & 2 & -1 \\ z-1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-3 & -1 \\ y & 2 \\ z-1 & -3 \end{matrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 2(x-3)+(z-1)-6y-4(z-1)-3(x-3)+y=0$

$\Leftrightarrow -(x-3)-5y-3(z-1)=0$

$\Leftrightarrow -x+3-5y-3z+3=0$

$\Leftrightarrow x+5y+3z-6=0$ ~~3p~~

D'où une équation cartésienne du plan π :

$\pi \equiv x+5y+3z-6=0$

2) Déterminer ~~une équation vectorielle et~~ un système d'équations paramétriques de la droite d passant par A et B.

$M(x;y;z) \in d = (AB)$

$\Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ **tel que** $\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{k} \cdot \overrightarrow{AB}$ ~~1,5p~~

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -3k \\ y = 3k \\ z+1 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 2-3k} \\ \boldsymbol{y = 3k} \\ \boldsymbol{z = -1+3k} \end{cases}$$ 2p. ~~1,5p~~

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de la droite d avec le plan π.

Les coordonnées d'un point commun I doivent vérifier les équations de d et de π.

$x+5y+3z-6=0$

$\Leftrightarrow (2-3k)+5\cdot 3k+3\cdot(-1+3k)-6=0$

$\Leftrightarrow 2-3k+15k-3+9k-6=0$

$\Leftrightarrow 21k-7=0$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$ 1,5p

Donc :

$$\begin{cases} x = 2-3\cdot\frac{1}{3} \\ y = 3\cdot\frac{1}{3} \\ z = -1+3\cdot\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

et $d \cap \pi = \{I\}$, avec $\boldsymbol{I(1;1;0)}$ 1,5p

Exercice 3 **((2+4)+(1+3)=10 points)**

Une urne contient 12 boules, toutes discernables : 3 rouges, 4 bleues et 5 blanches.

1) On tire simultanément 5 boules au hasard.
   a) Combien de tirages comportent exactement 3 boules bleues ?
   b) Combien de tirages comportent au moins 2 boules rouges ?

a) Exactement 3 boules bleues : $\underbrace{C_4^3}_{\textbf{3 bleues}} \cdot C_8^2 = 4 \cdot 28 = \mathbf{112}$ 2p

b) Au moins 2 boules rouges : $\underbrace{C_3^2}_{2R} \cdot C_9^3 \underbrace{+}_{\textbf{ou}} \underbrace{C_3^3}_{3R} \cdot C_9^2 = 3 \cdot 84 + 1 \cdot 36 = \mathbf{288}$ 4p

Alternative : $C_{12}^5 - \left(\underbrace{C_3^0}_{0R} \cdot C_9^5 + \underbrace{C_3^1}_{1R} \cdot C_9^4\right) = 792 - (1 \cdot 126 - 3 \cdot 126) = 288$

2) On tire successivement, avec remise, 4 boules au hasard.
   a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
   b) Combien de tirages comportent des boules qui sont toutes de la même couleur ?

a) Nombre de tirages possibles : $\mathbf{12^4 = 20736}$ 1p

b) Il est impossible de tirer quatre boules rouges. On peut donc tirer soit quatre boules bleues, soit quatre boules blanches : $\underbrace{4^4}_{\textbf{4 bleues}} \underbrace{+}_{\textbf{ou}} \underbrace{5^4}_{\textbf{4 blanches}} = 256 + 625 = \mathbf{881}$ 3p

Exercice 4 **(7+4=11 points)**

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(2x^2+x) - \frac{1}{2}\ln 16 = 2\ln(1-x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{1}{(e^{x+2})^2} \leq \frac{e^{-x}}{e^{7-2x}}$

1) $\ln(2x^2+x) - \frac{1}{2}\ln 16 = 2\ln(1-x)$

<u>*Conditions d'existence :*</u>

$2x^2 + x > 0$ et $1 - x > 0$

$\Leftrightarrow x \cdot (2x+1) > 0$ et $1 < x$

$\Leftrightarrow x \in \left(\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]0; +\infty\right[\right)$ et $x \in \left]-\infty; 1\right[$

$\left(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\mathbf{0}; \mathbf{1}\right[\right)$: 2p

$\ln(2x^2+x) - \frac{1}{2}\ln 16 = 2\ln(1-x)$

$\Leftrightarrow \ln(2x^2+x) = \frac{1}{2}\ln 16 + 2\ln(1-x)$

$\Leftrightarrow \ln(2x^2+x) = \ln\sqrt{16} + \ln(1-x)^2$

2) $\frac{1}{(e^{x+2})^2} \leq \frac{e^{-x}}{e^{7-2x}}$

$(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} = \mathbb{R})$:

$\frac{1}{(e^{x+2})^2} \leq \frac{e^{-x}}{e^{7-2x}}$

$\Leftrightarrow (e^{x+2})^{-2} \leq e^{-x} \cdot e^{2x-7}$

$\Leftrightarrow e^{-2\cdot(x+2)} \leq e^{-x+2x-7}$

$\Leftrightarrow -2 \cdot (x+2) \leq -x + 2x - 7$

$\Leftrightarrow -2x - 4 \leq x - 7$

$\Leftrightarrow 3 \leq 3x$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{1 \leq x}$

$\boldsymbol{S = [1; +\infty[}$ 4p

$\Leftrightarrow \ln(2x^2+x) = \ln 4 + \ln(1-x)^2$

$\Leftrightarrow \ln(2x^2+x) = \ln[4 \cdot (1-x)^2]$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x = 4 \cdot (1-x)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x = 4 - 8x + 4x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \qquad \Delta = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 49 = 7^2$

$\Leftrightarrow x = \frac{9-7}{4}$ ou $x = \frac{9+7}{4}$

$\Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in D}$ **ou** $x = \underbrace{4}_{\notin D}$

$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

5p

Exercice 5 **(2+5=7 points)**

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{2x-4}{1-3x}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition ~~et le domaine de dérivabilité~~ de la fonction f.
2) Etablir une équation de la tangente à la courbe C_f de f au point d'abscisse 1.

1) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-4}{1-3x}\right)$

Conditions d'existence :

- $\frac{2x-4}{1-3x} > 0$ et $x \neq \frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{2x-4}{1-3x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

dom $f = \left]\frac{1}{3}; 2\right[$

2p

2) $(\forall x \in \text{dom } f')$:

$f'(x) = \frac{1}{\frac{2x-4}{1-3x}} \cdot \left(\frac{2x-4}{1-3x}\right)'$

$= \frac{1-3x}{2x-4} \cdot \frac{(1-3x)\cdot 2 - (2x-4)\cdot(-3)}{(1-3x)^2}$

$= \frac{1-3x}{2x-4} \cdot \frac{2-6x+6x-12}{(1-3x)^2}$

$= \frac{1-3x}{2x-4} \cdot \frac{-10}{(1-3x)^2}$

$= \frac{-10}{(2x-4)(1-3x)}$

3p

On a : $f(1) = \ln(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$

équation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$

$\Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}(x-1) + 0$

$\Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$

2p

Exercice 6 **(4+5=9 points)**

Calculer ~~les primites suivantes :~~

1) $\int \frac{3x}{1-x^2}\, dx$ sur $]1; +\infty[$

2) $\int (2-4x) \cdot e^{-2x}\, dx$ sur $\mathbb{R}$

1) $\int \frac{3x}{1-x^2}\,dx$

$= 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx$

$= -\frac{3}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx$

$= -\frac{3}{2} \ln|1-x^2| + k \;, k \in \mathbb{R}$

4p

---

2) $\int (2-4x) \cdot e^{-2x}\,dx$

$= (2-4x) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) dx$

$= (2x-1) \cdot e^{-2x} - 2 \int e^{-2x}\,dx$

$= (2x-1) \cdot e^{-2x} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + k \;, k \in \mathbb{R}$

$= (2x-1) \cdot e^{-2x} + e^{-2x} + k \;, k \in \mathbb{R}$

$= e^{-2x} \cdot (2x-1+1) + k \;, k \in \mathbb{R}$

$= \mathbf{2x \cdot e^{-2x} + k \;, k \in \mathbb{R}}$

IPP avec :

$u(x) = 2-4x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -4$

$v'(x) = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

5p

Exercice 7 **(3+5=8 points)**

Dans un repère orthonormé du plan, on considère :

- la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 - 2x + 5$,
- la droite d représentant la fonction g définie par : $g(x) = 1 - 2x$.

1) Calculer les coordonnées des points d'intersections de la parabole $\mathcal{P}$ avec la droite d.
1) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la parabole $\mathcal{P}$ et la droite d ~~(valeur exacte et valeur approchée à 10^{-2} u. a. près)~~.

1) Intersection de la parabole $\mathcal{P}$ avec la droite d :

$f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 5 = 1 - 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$ 2p

Donc : $\mathcal{P} \cap d = \{A; B\}$,

avec $A(-2; g(-2)) = \mathbf{A(-2; 5)}$

et $B(2; g(2)) = \mathbf{B(2; -3)}$ 1p

2) Si $x \in [-2; 2]$, on a : $f(x) \geq g(x)$ et donc :

$\mathcal{A} = \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx$

$= \int_{-2}^{2} (-x^2 - 2x + 5 - (1 - 2x))\,dx$

$= \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2}$

$= \left(-\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 4 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)\right)$

$= \frac{16}{3} - \frac{-16}{3}$

$= \frac{32}{3}$ **u. a.** $\approx$ **10,67 u. a.** 5p