1G,EF Mathématiques - Corrigé

I

(a) $\underbrace{4^3}_{3V}\underbrace{+}_{ou}\underbrace{5^3}_{3R} = 64 + 125 = 189$

(b) $\underbrace{5}_{1èreR} \cdot \underbrace{4}_{2eR} \cdot \underbrace{7}_{\text{1 sur les 7 retantes}} = 140$

(c)

(1) $\underbrace{C_4^2}_{2V} \cdot \underbrace{C_5^2}_{2R} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 60$

(2) $\underbrace{C_9^4}_{\text{tirages possibles}} - \underbrace{C_5^4}_{\text{seulement R}} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 - 5 = 121$

II

(1)

$a. M(x,y,z) \in \Delta$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} \quad (k \in IR)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = k \cdot 3 \\ y-0 = k \cdot (-1) \\ z+2 = k \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + k \cdot 3 \\ y = 0 + k \cdot (-1) \\ z = -2 + k \cdot 1 \end{cases}$$

(2)

$b. B(2,3,1) \in \Delta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + k \cdot 3 & [1] \\ 3 = 0 + k \cdot (-1) & [2] \\ 1 = -2 + k \cdot 1 & [3] \end{cases} \text{ pour une même valeur de k}$$

$[1] \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

$[2]$ n'est pas vérifiée pour $k = \frac{1}{3}$

donc $B \notin \Delta$

2

$c.M(x,y,z) \in \Pi$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v}$ avec $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(1,3,3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 & = & p \cdot & 3 & + & q \cdot & 1 \\ y-0 & = & p \cdot & (-1) & + & q \cdot & 3 \\ z+2 & = & p \cdot & 1 & + & q \cdot & 3 \end{cases}$$

$d.$

Exprimons les valeurs p et q qui vérifient $[1]$ et $[2]$ à l'aide de x,y,z

Pour calculer p, éliminons q de $[1]$ et $[2]$:

$$3[1]-[2]: 3\cdot(3p+q)-(-p+3q) = 3(x-1)-y$$

$$10\text{p} = 3\text{x} - \text{y} - 3$$

$$\text{p} = \frac{3\text{x} - \text{y} - 3}{10}$$

Pour calculer q éliminons p de $[1]$ et $[2]$

$$3[1]+[2]: (3p+q)+3(-p+3q) = (x-1)+3y$$

$$10\text{q} = \text{x} + 3\text{y} - 1$$

$$\text{q} = \frac{\text{x} + 3\text{y} - 1}{10}$$

$M(x,y,z) \in \Pi$

$\Leftrightarrow$ les valeurs de p et q trouvées vérifient $[3]$

$$\Leftrightarrow z+2 = \frac{3x-y-3}{10}\cdot 1 + \frac{\text{x}+3\text{y}-1}{10}\cdot 3$$

$$\Leftrightarrow 10(z+2) = 3x - y - 3 + 3x + 9y - 3$$

$$\Leftrightarrow -6x - 8y + 10z + 26 = 0$$

(2)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 & [1] \quad \leftrightarrow \quad [1]+[3] \\ x + y + 2z = 4 & [2] \quad \leftrightarrow \quad [2]+2[3] \\ -x + 3y - z = -6 & [3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ -x + 7y = -8 \\ -x + 3y - z = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y = -9 \\ -x + 7y = -8 \\ -x + 3y - z = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 8 + 7 \cdot (-1) = 1 \\ z = -1 + 3 \cdot (-1) + 6 = 2 \end{cases}$$

Le système admet une solution unique (x,y,z) = (1,-1,2)

III

(1)

$CE \;\; 4x + 1 \neq 0$ et $\dfrac{4x-1}{4x+1} > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
4x - 1		-		-	0	+	
4x + 1		-	0	+		+	
$\frac{4x-1}{4x+1}$		+	‖	-	0	+	

$D_f =]-\infty \tfrac{1}{4}[\cup]\tfrac{1}{4},+\infty[$

$$\forall x \in D_f : f'(x) = \frac{1}{\frac{4x-1}{4x+1}} \cdot \frac{4(4x+1)-4(4x-1)}{(4x+1)^2} = \frac{4x+1}{4x-1} \cdot \frac{8}{(4x+1)^2} = \frac{8}{(4x+1)(4x-1)}$$

$(2)(e^2)^x \cdot e^{3x+1} \leq (e^{x+2})^7$

$\Leftrightarrow e^{5x+1} \leq e^{7x+14}$

$\Leftrightarrow 5x + 1 \leq 7x + 14$

$\Leftrightarrow -2x \leq 13$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{13}{2}$

$S = [-\frac{13}{2}, +\infty[$

(3)

$$CE\begin{cases}2-x>0\\ x>0\\ 2x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<2\\ x>0\\ x>\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}<x<2 \quad \text{Ensmble d'existence : } D=\left]\tfrac{1}{2},2\right[$$

$\forall x \in D:$

$\ln(2-x)+\ln x = \ln(2x-1)$

$\Leftrightarrow \ln[(2-x)x] = \ln(2x-1)$

$\Leftrightarrow (2-x)x = 2x-1$

$\Leftrightarrow -x^2 = -1$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \underbrace{-1}_{\substack{\notin D\\ \text{à rejeter}}} \quad \text{ou} \quad x = \underbrace{1}_{\substack{\in D\\ \text{acceptable}}}$

$S=\{1\}$

IV

(1) $\int e^x(e^x+4)dx \qquad \mathrm{u(x)} = \mathrm{e}^x, u'(x) = e^x$

$= \int u'(x)\cdot u(x)^5 dx$

$= \frac{1}{6}u(x)^6 + C$

$= \frac{1}{6}(e^x+1)^6 + C$

(2) $\int \frac{4x-1}{4x^2-2x+1}dx \qquad \mathrm{u(x)} = 4\mathrm{x}^2-2x+1, u'(x) = 8x-2$

$= \frac{1}{2}\int \frac{8x-2}{4x^2-2x+1}dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\ln|u(x)| + C$

$= \frac{1}{2}\cdot\ln|4x^2-2x+1| + C$

$(3)\int (2x+1)\ln x\,dx \qquad u(x)=\ln x \qquad v'(x)=2x+1$

$$u'(x)=\frac{1}{x} \qquad v(x)=x^2+x$$

$$=(x^2+x)\ln x-\int \frac{1}{x}(x^2+x)dx$$

$$=(x^2+x)\ln x-\int (x+1)dx$$

$$=(x^2+x)\ln x-\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)+C$$

$$=(x^2+x)\ln x-\frac{1}{2}x^2-x+C$$

V

$$A=\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[x^3-3x+3-2x^2+2x-1\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2+x+2)dx$$

$$=\left[\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{1}{2}x^2+2x+C\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left[\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}+2+C\right]-\left[\tfrac{1}{4}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}-2+C\right]$$

$$=\frac{8}{3}\ \text{(unités d'aire)}$$