Corrigé repêchage 2010, E, F, G

Question I

$$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x-y+7z=-4 \\ 2x+4y+9z=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=1 \\ \quad y+4z=-5 \\ \quad 8y+3z=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=1 \\ \quad y+4z=-5 \\ \quad\quad -29z=29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

$S=\{(2\,;-1\,;-1)\}$

Les trois plans, dont les équations sont celles du système, se coupent en un point I de coordonnées $(2\,;-1\,;-1)$.

Question II (3 + 4 + 3 = 10 points)

1) $\overrightarrow{AB}(-2\,;1\,;1)$

$$M(x\,;y\,;z)\in AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}(k\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2k+4 \\ y=k-1 \\ z=k+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2(y+1)+4 \\ y=(z-2)-1 \end{cases}$$

D'où : système d'équations cartésiennes de AB : $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ y-z+3=0 \end{cases}$

2) $M(x\,;y\,;z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}\ (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\alpha-\beta+5 \\ y=3\alpha+2\beta+5 \\ z=\alpha+3\beta+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=7\alpha+15 \\ 3x-2y=-7\beta+5 \\ z=\alpha+3\beta+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{2}{7}x+\frac{1}{7}y-\frac{15}{7} \\ \beta=-\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y+\frac{5}{7} \\ z=\frac{2}{7}x+\frac{1}{7}y-\frac{15}{7}-\frac{9}{7}x+\frac{6}{7}y+\frac{15}{7}+3 \end{cases}$$

D'où : équation cartésienne de π : $x-y+z-3=0$

3) $M(x\,;y\,;z)\in AB\cap\pi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2=0 \\ y-z+3=0 \\ x-y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+2 \\ z=y+3 \\ -2y+2-y+y+3-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+2 \\ z=y+3 \\ -2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$

π et AB se coupent en un point I de coordonnées $(0\,;1\,;4)$.

Question III (6 + 4 = 10 points)

1) $C_4^2\cdot C_{48}^3=6\cdot 17296=103776$
$C_4^2\cdot C_4^2\cdot C_{44}^1=6\cdot 6\cdot 44=1584$

2) $A_4^{52}-A_4^{48}=6497400-4669920=1827480$

Question IV (4 + 5 = 9 points)

1)
$$\begin{array}{rrcl} & e^{2x+5} & \leq & \frac{1}{e^{x^2-4}} \\ \Leftrightarrow & 2x+5 & \leq & -x^2+4 \\ \Leftrightarrow & x^2+2x+1 & \leq & 0 \\ \Leftrightarrow & x & = & -1 \end{array}$$

S= $\{-1\}$

2) CE : $3x - 5 > 0$ et $x + 1 > 0$ et $13 - 4x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{3}$ et $x > -1$ et $x < \frac{13}{4}$
D'où : $D = \left] \frac{5}{3} ; \frac{13}{4} \right[$

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \ln(3x - 5) - \ln(x + 1) & = & \ln(13 - 4x) \\
\Leftrightarrow & \frac{3x-5}{x+1} & = & 13 - 4x \\
\Leftrightarrow & 3x - 5 & = & (13 - 4x)(x + 1) \\
\Leftrightarrow & 4x^2 - 6x - 18 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & x = 3 & \text{ou} & \underbrace{x = -\frac{3}{2}}_{\notin D}
\end{array}
$$

S= {3}

Question V (8 + 4 + 6 = 18 points)

1) $x^2 > 0$ et $\ln(x^2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$ et $x \neq 1$ et $x \neq -1$
D'où : $D = \mathrm{R}^* \setminus \{-1;1\}$

$f'(x) = \frac{-\frac{2x}{x^2}}{(\ln(x^2))^2} = -\frac{2}{x(\ln(x^2))^2} = -\frac{1}{2x(\ln|x|)^2}$

$f(e) = \frac{1}{2}$

$f'(e) = -\frac{1}{2e}$

$f'(e) = -\frac{1}{2e}$
$f(e) = -\frac{1}{2\cancel{e}}$
$y - f(e) = f'(e)(x - e) \quad \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2e}x + 1$

2) $\int \frac{2+3x^2}{2x^3+4x}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{6x^2+4}{2x^3+4x}\,dx = \frac{1}{2} \ln(2x^3 + 4x) + k \quad (x \in \mathbb{R}_+^*, k \in \mathbb{R}) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \quad 2x^3 + 4x > 0)$

3) posons : $f(x) = 3x \qquad f'(x) = 3$
$g'(x) = \sin x \qquad g(x) = -\cos x$

$$\int_0^\pi 3x \cdot \sin x\,dx = [3x \cdot (-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi 3 \cdot (-\cos x)\,dx = [-3x \cdot \cos x + 3\sin x]_0^\pi = 3\pi$$

Question VI (8 points)

$$
\begin{array}{lrcl}
 & x^2 - 4x + 4 & = & -x^2 + 6x - 4 \\
\Leftrightarrow & 2x^2 - 10x + 8 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & x = 1 & \text{ou} & x = 4
\end{array}
$$

D'où : $\forall\, x \in [1;4] : x^2 - 4x + 4 \leq -x^2 + 6x - 4$

$$A = \int_1^4 (-2x^2 + 10x - 8)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x\right]_1^4 = -\frac{128}{3} + 80 - 32 - \left(-\frac{2}{3} + 5 - 8\right) = 9 \text{ (unités d'aires)}$$