Corrigé

Partie I : Systèmes d'équations et d'inéquations **20 points**

Question 1 (8 points)

$$\begin{cases} 6(y+3)-2(y-x)=5z-(1-y) \\ 1+0{,}02y+0{,}01x+0{,}01z=1 & |\cdot 100 \\ \dfrac{6x-7}{6}-\dfrac{2-12y}{3}+\dfrac{z}{2}=\dfrac{-15z+1}{6} & |\cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y+18-2y+2x=5z-1+y \\ 100+2y+x+z=100 \\ 6x-7-2(2-12y)+3z=-15z+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-5z=-19 \\ x+2y+z=0 \\ 6x+24y+18z=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-5z=-19 \\ x+2y+z=0 \\ x+4y+3z=2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr} L_1: & 2x+3y-5z=-19 \\ -2L_2: & -2x-4y-2z=0 \\ \hline L_1-2L_2: & -y-7z=-19 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} L_1: & 2x+3y-5z=-19 \\ -2L_3: & -2x-8y-6z=-4 \\ \hline L_1-2L_3: & -5y-11z=-23 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-5z=-19 \\ -y-7z=-19 \\ -5y-11z=-23 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr} -5L_2: & 5y+35z=95 \\ L_2: & -5y-11z=-23 \\ \hline -5L_2+L_3: & 24z=72 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-5z=-19 & (1) \\ -y-7z=-19 & (2) \\ 24z=72 & (3) \end{cases}$$

Par (3) : $z=3$

Dans (2) : $-y-7\cdot 3=-19$

$\Leftrightarrow y=-2$

Dans (1) : $2x+3\cdot(-2)-5\cdot 3=-19$

$\Leftrightarrow 2x=2$

$\Leftrightarrow x=1$

$S=\{(1;-2;3)\}$

Question 2 (12 points)

- Soient x le nombre de sachets A
  y le nombre de sachets B

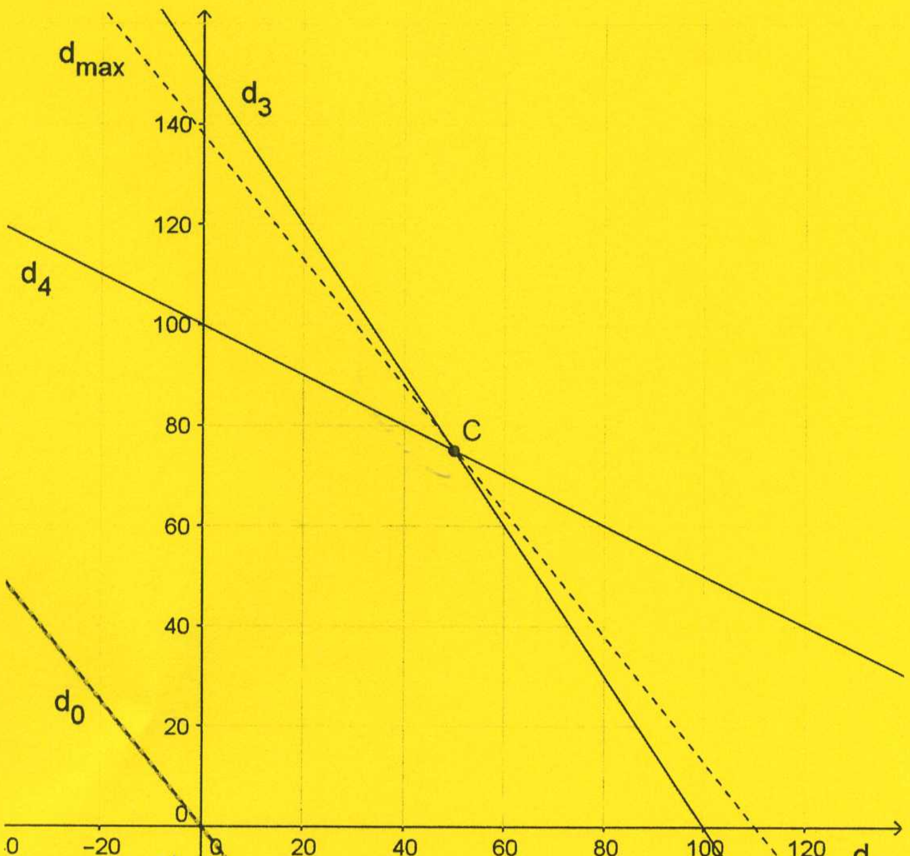
  Il faut résoudre le système d'inéquations suivant $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 300x + 200y \leq 30000 \\ 80x + 160y \leq 16000 \end{cases}$

  et il faut maximiser la fonction $f(x,y) = 1x + 0,8y$

- Ainsi, on trace les droites :

$d_1 \equiv x = 0$	$d_1 \equiv x = 0$
$d_2 \equiv y = 0$	$d_2 \equiv y = 0$
$d_3 \equiv 300x + 200y = 30000$	$d_3 \equiv y = -\frac{3}{2}x + 150$
$d_4 \equiv 80x + 160y = 16000$	$d_4 \equiv y = -\frac{1}{2}x + 100$
$d_0 \equiv x + 0,8y = 0$	$d_0 \equiv y = -\frac{5}{4}x$

- Polygone des contraintes :
  Par un déplacement de d_0 parallèlement à elle-même, on trouve que le bénéfice maximal est atteint en C.



- Calcul des coordonnées de C ($d_3 \cap d_4$):

  $-\frac{3}{2}x+150=-\frac{1}{2}x+100 \Leftrightarrow x=50$

  $y=-\frac{3}{2}\cdot 50+150=75$

  Le bénéfice maximal est atteint en C(50 ; 75).

- L'usine doit fabriquer 50 sachets A et 75 sachets B par heure pour maximiser son profit.

  $f(50,75)=50+0,8\cdot 75=110$

  Le bénéfice maximal (par heure) est de 110 €.

Partie II : Analyse

23 points

Question 3 (4 + 3 = 7 points)

a)

$$\begin{aligned}
&7\cdot 2^{3x}-1=3\cdot 2^{3x}+15\\
&\Leftrightarrow 4\cdot 2^{3x}=16\\
&\Leftrightarrow 2^{3x}=4\\
&\Leftrightarrow 2^{3x}=2^2\\
&\Leftrightarrow 3x=2\\
&\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&7\cdot 2^{3x}-1=3\cdot 2^{3x}+15\\
&\Leftrightarrow 4\cdot 2^{3x}=16\\
&\Leftrightarrow 2^{3x}=4\\
&\Leftrightarrow \log 2^{3x}=\log 4\\
&\Leftrightarrow 3x\cdot\log 2=\log 4\\
&\Leftrightarrow 3x=\frac{\log 4}{\log 2}\\
&\Leftrightarrow 3x=2\\
&\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\log_3(2-7x)=2\\
&\Leftrightarrow \log_3(2-7x)=\log_3 3^2\\
&\Leftrightarrow 2-7x=9\\
&\Leftrightarrow -7x=7\\
&\Leftrightarrow x=-1
\end{aligned}$$

Question 4 (5 + 3 + 2 = 10 points)

$f(x)=\frac{2}{3}x^3-5x^2+8x+\frac{1}{3}$

a) $f'(x)=2x^2-10x+8$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0$

$$\Delta = 100 - 4\cdot 2\cdot 8 = 36$$

$$x_1 = \frac{10-6}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{10+6}{4} = 4$$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	4	↘	-5	↗	

$$f(1) = \frac{2}{3}\cdot 1^3 - 5\cdot 1^2 + 8\cdot 1 + \frac{1}{3} = 4 \qquad f(4) = \frac{2}{3}\cdot 4^3 - 5\cdot 4^2 + 8\cdot 4 + \frac{1}{3} = -5$$

La courbe de *f* admet un maximum au point (1 ;4) et un minimum au point (4 ;-5).

b) $f''(x) = 4x - 10$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 10 = 0$

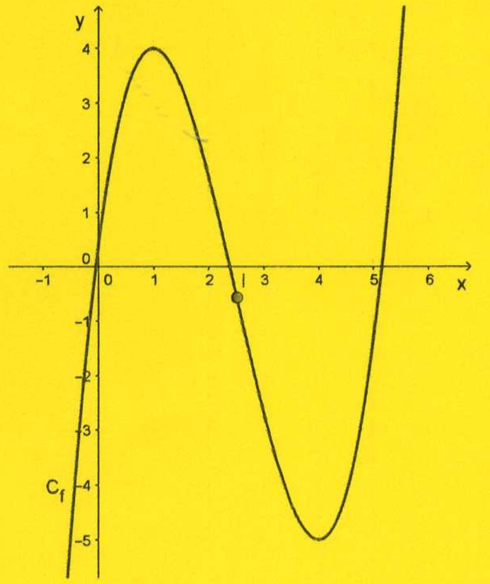
$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
G_f		$\cap$	$-\frac{1}{2}$	$\cup$	

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8\cdot\frac{5}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

Le point $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion.

c)



Question 5 (6 points)

a) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	max	↘	min	↗	

D'après le signe de f', $C_{f'} = C_3$.

b) Tableau de variation de f'

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		↘	min	↗	

D'après le signe de f'', $C_{f''} = C_6$.

Partie III : Probabilités et combinatoire

17 points

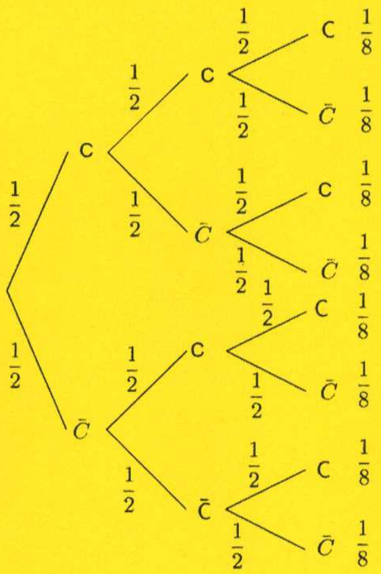
Question 6 (4 + 2 = 6 points)

	machine A	machine B	totaux
défectueuses	10% de 60%=6%	5% de 40%=2%	8%
pas défectueuses	90% de 60%=54%	95% de 40%=38%	92%
totaux	60%	40%	100%

$P(\text{B} \mid \text{défectueuse}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Question 7 (3 + 2 + 2 = 7 points)

a)



b) $P(\text{au moins une réponse correcte}) = 1 - P(\text{aucune réponse correcte}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

c) $P(\text{exactement deux réponses correctes}) = P\left(CC\bar{C} \text{ ou } C\bar{C}C \text{ ou } \bar{C}CC\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Question 8 (2 + 2 = 4 points)

a) L'ordre joue un rôle, pas de répétitions possibles : arrangements sans répétitions

$$A_{25}^{4} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$$

b) Deux lettres parmi 10 + un symbole parmi 5 + un chiffre parmi 10 :

$$A_{10}^{2} \cdot A_{5}^{1} \cdot A_{10}^{1} = 10 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 10 = 4500$$