LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES 2019

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques II	**C, D**	*Durée de l'épreuve :* *2 h 45* *Date de l'épreuve :* *18 octobre 2019*

Théorie : (2 + 2 = 4 points)

Démontrez les énoncés suivants :

1) Si a est un réel strictement positif distinct de 1, alors pour tout réel x,
   $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

2) Si f est une fonction continue sur un intervalle I de réels, x_0 est un réel de I, y_0 est un réel quelconque, alors il existe *une et une seule primitive* F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Exercice 1 : (4 + 4 + 4 + 2 + 3 = 17 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\colon x \mapsto e^{-2x} - 4e^{-x} + 2$ et soit C_f son graphe.
Faites l'étude de la fonction f :

a) domaines de définition et de dérivabilité, limites aux bornes du domaine et comportement asymptotique,

b) dérivée, tableau des variations et extrema,

c) dérivée seconde, tableau de concavité et points d'inflexion éventuels,

d) équation de la tangente t à C_f au point d'abscisse $x = 2\ln 2$,

e) représentation graphique de C_f et de t dans un repère orthonormé (unité 1 cm).

Exercice 2 : (2 points)

On donne la fonction f définie par $f\colon x \mapsto 3x + \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{x^2+1}}{2x}$.
Déterminez la nature et l'équation de l'asymptote à C_f en $-\infty$.

Exercice 3 : ((3+5+2) + 5 = 15 points)

1) Déterminez l'intégrale et les primitives suivantes :

   a) $\int_1^2 \frac{x^3+2x^2+3x-1}{6x^2}\, dx$

   b) $\int e^{\frac{x}{3}} \cdot \cos(3x)\ dx$

   c) $\int (1 - \cos^2 x) \cos x\ dx$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \frac{2x^2+8x+3}{x^2+2x+1}$.
   Déterminez les réels a, b et c tels que $g(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$
   et déduisez-en les primitives de g.

Exercice 4 : (5 + (2+4) = 11 points)

1) Résolvez l'équation :

$$\frac{3^x - 3^{-x}}{3 - 3^{-x+1}} = 1$$

2) Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

   a) Vérifiez que $x = -1$ est une racine de $P(x)$ et résolvez l'équation $P(x) = 0$.

   b) Utilisez les résultats de la partie a) pour résoudre l'inéquation :

   $2\ln x - \ln(2 - x) \leq -\ln(2x + 5)$

Exercice 5 : (3 + 3 = 6 points)

Déterminez les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{e}{x}\right)^{xe}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x \cdot \log(3 - x)$

Exercice 6 : (5 points)

Soit la fonction f définie par $f: x \mapsto \sin x \cos x$.

Déterminez l'aire du plan délimitée par la droite d'équation $y = -1$, le graphe C_f et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{2\pi}{3}$.

FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$
$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$
$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$2\cos^2 x=1+\cos 2x$$
$$2\sin^2 x=1-\cos 2x$$

$$\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\qquad \cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\qquad \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\qquad \cos 3x=-3\cos x+4\cos^3 x$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\qquad \sin^2 x=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\qquad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x\qquad \sin(\pi+x)=-\sin x\qquad \sin(-x)=-\sin x$$
$$\cos(\pi-x)=-\cos x\qquad \cos(\pi+x)=-\cos x\qquad \cos(-x)=\cos x$$
$$\tan(\pi-x)=-\tan x\qquad \tan(\pi+x)=\tan x\qquad \tan(-x)=-\tan x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\text{cotan } x\qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\text{cotan } x$$