LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	**EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES** **2019** **CORRIGÉ – BARÈME**

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
MATHÉMATIQUES II	**C, D**	*Durée de l'épreuve :*	*2h 45min*
		Date de l'épreuve :	*19/09/2019*

Théorie : **(4 points)**

Voir livre Espace Math 66, théorème 3 à la page 86, démonstration à la page 87.

Exercice 1 : **(14 points)**

1) **C.E. :**

A. $x \neq 0\,;\, D_1 = \mathbb{R}^*$

B. $x > 0\,;\, D_2 = \mathbb{R}_+^*$

C. $\ln^2(x) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \neq 1 \text{ et } \ln(x) \neq -1 \Leftrightarrow x \neq e \text{ et } x \neq \frac{1}{e}\,;$

$D_3 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{e}; e\right\}$

Conclusion :

$\operatorname{dom} f = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{1}{e}\,; e\right\} = \left]0\,; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}\,; e\right[\cup \left]e\,; +\infty\right[$

$\operatorname{dom}_d f = \operatorname{dom} f$

1 pt

2) **Limites et asymptotes**

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{(\ln^2(x)-1)}_{\to +\infty}}$ f.i. « $0 \cdot \infty$ » au dénominateur

  Calculons la limite du dénominateur à part. Tout d'abord :

  $$\lim_{x\to 0^+}[x \cdot \ln^2(x)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\ln^2(x)}^{\to +\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{2\ln(x)}^{\to +\infty}}{\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to -\infty}}$$

  $$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(2x)$$

  Donc :

  $$\lim_{x\to 0^+}[x \cdot \ln^2(x) - x] = \lim_{x\to 0^+}(2x - x) = 0^+ \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\cdot(\ln^2(x)-1)} = +\infty$$

  A.V. d'éq. $x = 0$.

2 pts

- $$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-} \frac{1}{\underbrace{\underbrace{x}_{\to\frac{1}{e}} \cdot \underbrace{(\ln^2(x)-1)}_{\to 0^+}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

  A.V. d'éq. $x = \frac{1}{e}$.

- $$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} \frac{1}{\underbrace{\underbrace{x}_{\to\frac{1}{e}} \cdot \underbrace{(\ln^2(x)-1)}_{\to 0^-}}_{\to 0^-}} = -\infty$$

- $$\lim_{x\to e^-} \frac{1}{\underbrace{\underbrace{x}_{\to e} \cdot \underbrace{(\ln^2(x)-1)}_{\to 0^-}}_{\to 0^-}} = -\infty$$

  A.V. d'éq. $x = e$.

- $\lim\limits_{x \to e^+} \dfrac{1}{\underbrace{\underbrace{x}_{\to e} \cdot \underbrace{(\ln^2(x)-1)}_{\to 0^+}}_{\to 0^+}} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\underbrace{\underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{(\ln^2(x)-1)}_{\to +\infty}}_{\to +\infty}} = 0^+$

$\boxed{\text{A.H. d'éq. } y = 0.}$ et $\boxed{\mathcal{C}_f/\text{A.H.}}$

3 pts

3)

- **Fonction dérivée :**

$$f'(x) = -\frac{\ln^2(x)-1+x\cdot 2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{x^2\cdot(\ln^2(x)-1)^2} = \frac{\ln^2(x)+2\cdot\ln(x)-1}{-x^2\cdot(\ln^2(x)-1)^2} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

- **Racines de $f'(x)$:**

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln^2(x) + 2\cdot\ln(x) - 1 = 0$

Posons $y = \ln(x)$. Ainsi l'équation s'écrit $y^2 + 2y - 1 = 0$.

$\Delta = 4 + 4 = 8$; $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$ et $y_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$; $y_2 = -1+\sqrt{2}$.

Revenons à la variable x : $x_1 = e^{-1-\sqrt{2}}$ et $x_2 = e^{-1+\sqrt{2}}$.

- **Signe de $f'(x)$ et tableau des variations :**

x	0		$e^{-1-\sqrt{2}}$		$\frac{1}{e}$		$e^{-1+\sqrt{2}}$		e		$+\infty$
$N(x)$	‖	+	0	-	‖	-	0	+	‖	+	
$D(x)$	‖	-		-	‖	-		-	‖	-	
$f'(x)$	‖	-	0	+	‖	+	0	-	‖	-	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	min. loc.	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	Max. loc.	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0^+
	A.V.				A.V.				A.V.		A.H.

4 pts

4) a) Comme f est strictement décroissante sur $]e\,;+\infty[$ et comme $\lim\limits_{x\to e^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, il faut avoir que $f(x) > 0, \forall x \in]e\,;+\infty[$.

1 pt

b) Il suffit de montrer que : $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

Or : $F'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot(\ln(x)+1)-(\ln(x)-1)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x)+1)^2} = \frac{1}{x\cdot(\ln^2(x)-1)} = f(x) \quad (x \in I)$

1 pt

c) $A(\lambda) = +\int_{e^2}^{\lambda} f(x)\,dx = F(\lambda) - F(e^2) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{\ln(\lambda)-1}{\ln(\lambda)+1}\right) - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{\ln(e^2)-1}{\ln(e^2)+1}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{\ln(\lambda)-1}{\ln(\lambda)+1}\right) - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ u. a.

1 pt

d) Comme $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln(\lambda)-1}{\ln(\lambda)+1} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1$, nous trouvons :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\ln\underbrace{\left(\frac{\ln(\lambda)-1}{\ln(\lambda)+1}\right)}_{\to 1}}_{\to 0} - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right] = -\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln(3)}{2} \text{ u. a.}$$

1 pt

Exercice 2 (4 points)

- **C.E. :** $x > 0$ et $x \neq 0$
  dom $f = \mathbb{R}_+^*$

0.5 pt

- $f(x) = \frac{3x^2-2x+\ln(x)}{x} = 3x - 2 + \frac{\ln(x)}{x}$

  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$,

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\underbrace{3x-2}_{\substack{\to+\infty \\ \text{A.O.}}} + \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0^+} \right) = +\infty$$

  $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = 3x - 2$.

2.5 pts

- **Position :**
  Etude du signe de $\frac{\ln(x)}{x}$:

x	0		1		$+\infty$
$\frac{\ln(x)}{x}$	‖	$-$	0	$+$	
Position		$\mathcal{C}_{A.H.} / \mathcal{C}_f$		$\mathcal{C}_f / \mathcal{C}_{A.H.}$	

1 pt

Exercice 3 (7 points)

1)

$$\lim_{x\to0^+} \left(\underbrace{\frac{1}{e^x-1}}_{\to+\infty} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to+\infty} \right) = \lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{x-e^x+1}^{\to0}}{\underbrace{\underbrace{x}_{\to0} \cdot \underbrace{(e^x-1)}_{\to0}}_{\to0}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{1-e^x}^{\to0}}{\underbrace{e^x-1+x\cdot e^x}_{\to0}}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{-e^x}^{\to-1}}{\underbrace{e^x+e^x+x\cdot e^x}_{\to2}} = -\frac{1}{2}$$

3 pts

2)

$L = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{2x-3}$

Posons : $\frac{1}{h} = \frac{4}{x-1} \Leftrightarrow x = 4h + 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{4} \cdot (x-1)$; si $x \to +\infty$, alors $h \to +\infty$.

Donc :

$$L = \lim_{h\to+\infty} \left(1+\frac{1}{h}\right)^{2\cdot(4h+1)-3} = \lim_{h\to+\infty} \left(1+\frac{1}{h}\right)^{8h-1}$$

$$= \lim_{h\to+\infty} \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{h}\right)^h}_{\to e} \right]^8 \cdot \lim_{h\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{h}\right)^{-1}}_{\to1} = e^8.$$

4 pts

Exercice 4 : **(9 points)**

1)	$\int_0^{\ln(7)} \frac{2\cdot e^x}{(2+e^x)^2} dx = 2\cdot \int_0^{\ln(7)} \underbrace{e^x}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{2+e^x}_{=u(x)}\right)^{-2}}_{=u^{-2}(x)} dx = 2\cdot \left[-\frac{1}{2+e^x}\right]_0^{\ln(7)}$ $= -2\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$	2 pts
2)	$I = \int (2x^2+3x)\cdot\cos(4x)\,dx$ IPP : $u(x) = 2x^2+3x$; $u'(x) = 4x+3$ $v'(x) = \cos(4x)$; $v(x) = \frac{1}{4}\cdot\sin(4x)$ $I = \frac{1}{4}\cdot(2x^2+3x)\cdot\sin(4x) - \frac{1}{4}\cdot\int (4x+3)\cdot\sin(4x)\,dx$ IPP : $u(x) = 4x+3$; $u'(x) = 4$ $v'(x) = \sin(4x)$; $v(x) = -\frac{1}{4}\cdot\cos(4x)$ $I = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{4}\right)\cdot\sin(4x) + \frac{1}{4}\cdot\left(x+\frac{3}{4}\right)\cdot\cos(4x) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\int 4\cdot\cos(4x)\,dx$ $= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{4}\right)\cdot\sin(4x) + \left(\frac{x}{4}+\frac{3}{16}\right)\cdot\cos(4x) - \frac{1}{16}\sin(4x)$	4 pts
3)	$\int_e^{e^e} \frac{e}{x\cdot\ln(x)} dx = e\cdot\int_e^{e^e} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{[\ln^{-1}(x)]}_{u^{-1}(x)} dx = e\cdot[\ln\lvert\ln(x)\rvert]_e^{e^e} = e(1-0) = e$	3 pts

Exercice 5 : **(11 points)**

1)	• **C.E. :** $x > -3$ et $(x+3)^2 > 0$ Donc : $D =]-3\,;\,+\infty[$ • $\forall x \in D$: $[\log_3(x+3)]^2 - \log_3[(x+3)^2] - 3 = 0$ $\Leftrightarrow [\log_3(x+3)]^2 - 2\cdot\log_3(x+3) - 3 = 0$ Posons : $y = \log_3(x+3)$. L'équation s'écrit alors : $y^2 - 2y - 3 = 0$; $\Delta = 4+12 = 16 > 0$; $y_1 = \frac{2-4}{2} = -1$; $y_2 = \frac{2+4}{2} = 3$. Retournons à la variable x : (a) $\log_3(x+3) = -1 \Leftrightarrow x+3 = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{8}{3} \in D$ (b) $\log_3(x+3) = 3 \Leftrightarrow x+3 = 3^3 \Leftrightarrow x = 24 \in D$ $S = \left\{-\frac{8}{3}; 24\right\}$	5 pts

<table>
<tr><td>2)</td><td>

- **C.E. :** $e^x \neq 0$ tjs. vrai
Donc : $D = \mathbb{R}$
- $\forall x \in D$:
$\frac{e^{2x}-3}{e^x} \leq 2 - e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 3 \leq 2\,e^x - e^{2x} \Leftrightarrow 2e^{2x} - 2e^x - 3 \leq 0$
Posons : $y = e^x$, avec $y > 0$.
L'équation s'écrit alors :
$2y^2 - 2y - 3 \leq 0$; $\Delta = 4 + 24 = 28 > 0$; $y_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$; $y_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.
Tds pour y :
y : $-\infty$ … y_1 … 0 … y_2 … $+\infty$
$2y^2 - 2y - 3$: $+$ 0 $-$ ‖ $-$ 0 $+$
Donc : $0 < y \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.
Retournons à la variable x :
(a) $0 < e^x$ tjs. vrai
(b) $e^x \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow x \leq \ln\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$
Finalement : $S = \left]-\infty \,;\, \ln\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)\right]$

</td><td>6 pts</td></tr>
</table>

Exercice 6 : **(6 points)**

<table>
<tr><td></td><td>

- $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c(x^2+4)}{x^3-2x^2+4x-8} = \frac{ax^2-2ax+bx-2b+cx^2+4c}{x^3-2x^2+4x-8}$
$= \frac{(a+c)x^2+(b-2a)x+(4c-2b)}{x^3-2x^2+4x-8}$

</td><td>1 pt</td></tr>
<tr><td></td><td>

- En comparant les coefficients des polynômes des numérateurs dans les deux écritures de $g(x)$, nous trouvons le système d'équations suivant :
$\begin{cases} a + c = 9 & (E_1) \\ -2a + b = -1 & (E_2) \\ -2b + 4c = 22 & (E_3) \mapsto 2(E_2) + (E_3) \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 9 & (E_1) \\ -2a + b = -1 & (E_2) \\ -4a + 4c = 20 & (E_3') \mapsto 4(E_1) + (E_3') \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 9 & (E_1) \\ -2a + b = -1 & (E_2) \\ 8c = 56 & (E_3'') \end{cases}$
Donc : $c = 7$; $a = 9 - c = 2$; $b = -1 + 2c = -1 + 4 = 3$ et
$$g(x) = \frac{2x+3}{x^2+4} + \frac{7}{x-2}.$$

</td><td>1.5 pts</td></tr>
<tr><td></td><td>

- $I = \int g(x)dx = \int \frac{2x+3}{x^2+4}dx + \int \frac{7}{x-2}dx = \int \frac{2x}{x^2+4}dx + \int \frac{3}{x^2+4}dx + \int \frac{7}{x-2}dx$
(a) $\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \ln|x^2+4| + k_1 \quad (k_1 \in \mathbb{R})$
(b) $\int \frac{3}{x^2+4}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x^2}{4}\right)+1}dx = \frac{3}{2}\text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + k_2 \quad (k_2 \in \mathbb{R})$
(c) $\int \frac{7}{x-2}dx = 7 \cdot \ln|x-2| + k_3 \quad (k_3 \in \mathbb{R})$
D'où : $I = \ln|x^2+4| + \frac{3}{2}\text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + 7\ln|x-2| + k \quad (k \in \mathbb{R})$

</td><td>3.5 pts</td></tr>
</table>

Exercice 7 : **(6 points)**

a)

- **Points d'intersection :**

$$f(x) = g(x)$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - 2$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 + 2 = x^2 + 2x - 3$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) - 5(x^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x - 5)(x + 1)(x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 1$$

1.5 pt

b)

- **Position relative des deux courbes représentatives :**

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Position		$\mathcal{C}_g/\mathcal{C}_f$		$\mathcal{C}_f/\mathcal{C}_g$		$\mathcal{C}_g/\mathcal{C}_f$		$\mathcal{C}_f/\mathcal{C}_g$	

1.5 pt

c)

- **Calcul d'aire :**

$$A = \int_{-1}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx + \int_{1}^{\frac{5}{2}} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{5}{2x^2} - x + \frac{5}{2}\right) dx + \int_{1}^{\frac{5}{2}} \left(-x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}\right) dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5}{6}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5}{6}x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x\right]_{1}^{\frac{5}{2}}$$
$$= \frac{17}{12} - \left(-\frac{23}{12}\right) + \frac{25}{192} - \left(-\frac{17}{12}\right)$$
$$= \frac{937}{192} \text{ u.a.}$$

3 pts