LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2019
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
MATHÉMATIQUES II	C, D	Durée de l'épreuve : 165 minutes Date de l'épreuve : 24/05/2019

Question théorique (4 points)

voir livre EM66, pp.86-87

Exercice 1 (4 + 4 + 3,5 + 1,5 + 3 = 16 points)

$f(x)=\left(x^2-2x\right)\cdot e^{\frac{x}{2}}$ $\qquad dom\ f = dom\ f' = dom\ f'' = \mathbb{R}$

1) limites et comportement asymptotique (4 points)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\left(x^2-2x\right)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{\to 0}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{x^2-2x}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{\to+\infty}}\overset{(H)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{2x-2}^{\to-\infty}}{\underbrace{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}}_{\to-\infty}}\overset{(H)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{\underbrace{\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}}_{\to+\infty}}=0$ $\qquad$ $\boxed{\text{A.H.G.: } y=0}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\left(x^2-2x\right)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{\to+\infty}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-2x\right)e^{\frac{x}{2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{(x-2)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{\to+\infty}=+\infty$ $\qquad$ $\boxed{\text{B.P.D. de direction } (Oy)}$

2) dérivée (4 points)

$(\forall x\in dom\ f'): f'(x)=(2x-2)e^{\frac{x}{2}}+\left(x^2-2x\right)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=\boxed{\frac{1}{2}\left(x^2+2x-4\right)\underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{>0}}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de x^2+2x-4.

$\left(\Delta=4+16=20\,;\,x_1=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}=-1+\sqrt{5}\,;\,x_2=\frac{-2-\sqrt{20}}{2}=-1-\sqrt{5}\right)$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	0	↗	max	↘	min	↗	$+\infty$

minimum $\boxed{\left(-1-\sqrt{5};\left(8+4\sqrt{5}\right)e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right)}$ $\qquad -1-\sqrt{5}\approx-3,24 \qquad \left(8+4\sqrt{5}\right)e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\approx 3,36$

maximum $\boxed{\left(-1+\sqrt{5};\left(8-4\sqrt{5}\right)e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)}$ $\qquad -1+\sqrt{5}\approx 1,24 \qquad \left(8-4\sqrt{5}\right)e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\approx-1,75$

<u>3) dérivée seconde</u> (3,5 points)

$$(\forall x \in dom\ f''): f''(x) = \frac{1}{2}(2x+2)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(x^2+2x-4)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \boxed{\frac{1}{4}(x^2+6x)\underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{>0}}$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x^2+6x = x(x+6)$.

x	$-\infty$		-6		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
C_f		$\cup$	p.i.1	$\cap$	p.i.2	$\cup$	

points d'inflexion : $\boxed{(0,0)}$ et $\boxed{\left(-6;\frac{48}{e^3}\right)}$ $\frac{48}{e^3} \approx 2,39$

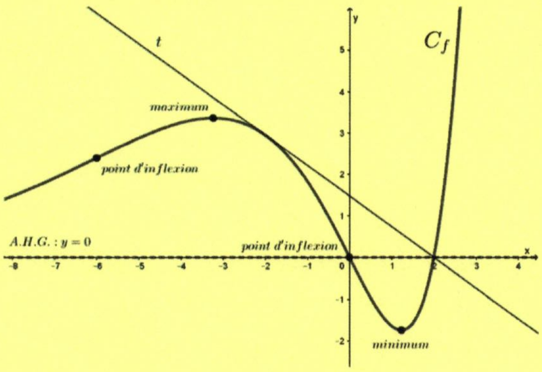
<u>4) tangente</u> (1,5 points)

$t \equiv y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

or $f'(-2) = -\frac{2}{e}$ et $f(-2) = \frac{8}{e}$

donc $t \equiv y = -\frac{2}{e}(x+2) + \frac{8}{e} \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{2}{e}x + \frac{4}{e}}$

<u>5) représentation graphique</u> (3 points)



Exercice 2 (5 points)

<u>équation de l'A.O. :</u> (3 points)

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-5x^3+x^2-4}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-5x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -5x = \mp\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-5x^3+x^2-4}{x(x^2-4)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-5x^3}{x^3} = -5$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)+5x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-5x^3+x^2-4}{x^2-4} + 5x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-20x-4}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

  donc C_f admet une asymptote oblique d'équation $\boxed{y = -5x+1}$.

<u>ou bien :</u> par division polynomiale $f(x) = -5x+1-\frac{20x}{x^2-4} = -5x+1+\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$

donc C_f admet une asymptote oblique d'équation $\boxed{y = -5x+1}$.

<u>position C_f / A.O. :</u> (2 points)

$$(\forall x \in dom\ f): f(x)-(-5x+1)=\frac{-20x}{x^2-4}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$-20x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-20x}{x^2-4}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
position C_f / A.O.		$\frac{C_f}{\text{A.O.}}$	$\|$	$\frac{\text{A.O.}}{C_f}$	$\cap$	$\frac{C_f}{\text{A.O.}}$	$\|$	$\frac{\text{A.O.}}{C_f}$	

Exercice 3 (3 + 5 + 4 = 12 points)

1) (3 points)

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{3x}{4}\right)^{\frac{2}{x}-3} \qquad \text{posons } n=\frac{3x}{4}\Leftrightarrow x=\frac{4n}{3} \quad \text{donc si } x\to0,\ \text{alors } n\to0$$

$$=\lim_{n\to0}(1+n)^{\frac{3}{2n}-3}$$

$$=\lim_{n\to0}\left[\underbrace{(1+n)^{\frac{1}{n}}}_{\to e}\right]^{\frac{3}{2}}\cdot\lim_{n\to0}\underbrace{(1+n)^{-3}}_{\to1}$$

$$=e^{\frac{3}{2}}=\boxed{\sqrt{e^3}}$$

<u>ou bien :</u>

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{3x}{4}\right)^{\frac{2}{x}-3}=\lim_{x\to0}e^{\ln\left(1+\frac{3x}{4}\right)^{\frac{2}{x}-3}}=\lim_{x\to0}e^{\underbrace{\underbrace{\left(\frac{2}{x}-3\right)}_{\to\infty}\underbrace{\ln\left(1+\frac{3x}{4}\right)}_{\to0}}_{\to\frac{3}{2}(*)}}=e^{\frac{3}{2}}=\boxed{\sqrt{e^3}}$$

calcul à part :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2-3x}{x}\right)\ln\left(1+\frac{3x}{4}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{3x}{4}\right)}{\frac{x}{2-3x}}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{3x}{4}}}{\frac{1(2-3x)-x(-3)}{(2-3x)^2}}=\lim_{x\to0}\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{4+3x}\cdot\frac{(2-3x)^2}{2-6x}=\frac{3\cdot4\cdot4}{4\cdot4\cdot2}=\frac{3}{2}(*)$$

2) (5 points)

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{e^{x}-1}\right)=-1$$

C.E.1 : $e^x-1\neq0\Leftrightarrow e^x\neq1\Leftrightarrow x\neq0$

C.E.2 : $\frac{\overbrace{e^{-x}+e^{x}}^{>0}}{e^x-1}>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$

donc $\boxed{D=]0;+\infty[}$.

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{e^{x}-1}\right)=-1 \qquad |\dfrac{1}{2}^{()}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{e^{x}-1}=2 \qquad |\cdot(e^{x}-1)$

$\Leftrightarrow e^{-x}+e^{x}=2e^{x}-2 \qquad |\cdot e^{x}$

$\Leftrightarrow 1+e^{2x}=2e^{2x}-2e^{x}$

$\Leftrightarrow e^{2x}-2e^{x}-1=0$

posons $t=e^{x}$, on obtient $t^2-2t-1=0$

$\Delta=4+4=8 \quad ; \quad t_1=\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}=1+\sqrt{2} \quad ; \quad t_2=\dfrac{2-\sqrt{8}}{2}=1-\sqrt{2}$

revenons vers x :

si $t=1+\sqrt{2}$, alors $e^{x}=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

si $t=1-\sqrt{2}$, alors $e^{x}=1-\sqrt{2}$ impossible

$\boxed{S=\left\{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}}$

3) (4 points)

$\log(x+2)-\log(x^2+9)+1<-\log(x-2)$

C.E.1 : $x+2>0\Leftrightarrow x>-2$

C.E.2 : $x^2+9>0$ vrai !

C.E.3 : $x-2>0\Leftrightarrow x>2$ $\qquad D=\left]2;+\infty\right[$

$\log(x+2)-\log(x^2+9)+1<-\log(x-2)$

$\Leftrightarrow \log(x+2)+\log(x-2)+\log(10)<\log(x^2+9)$

$\Leftrightarrow \log\left[10(x+2)(x-2)\right]<\log(x^2+9)$

$\Leftrightarrow 10x^2-40<x^2+9$

$\Leftrightarrow 9x^2<49$

$\Leftrightarrow -\dfrac{7}{3}<x<\dfrac{7}{3}$

$\boxed{S=\left]2;\dfrac{7}{3}\right[}$

Exercice 4 ((3 + 4) + 3 + 4 = 14 points)

1) a) (3 points)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x \cos x}{\cos^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin x \cos^{-3} x dx = -2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (-\sin x)\cos^{-3} x dx$$

$$= \left[\frac{-2}{-2}\cos^{-2} x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left[\frac{1}{\cos^2 x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 4 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

1) b) (4 points)

$$\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx - \int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx + \frac{1}{4}\int \frac{-8x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(2x) + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{1-4x^2} + k = \boxed{\frac{1}{2}\arcsin(2x) + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + k}, k \in \mathbb{R}$$

2) (3 points)

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x^2} = 2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$$

donc $F(x) = 2x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + k, k \in \mathbb{R}$

$$F(-2) = 3\ln 2 \Leftrightarrow -4 + 3\ln 2 - \frac{1}{2} + k = 3\ln 2 \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}$$

La primitive recherchée est $F(x) = \boxed{2x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{9}{2}}$.

3) (4 points)

$g(x) = \frac{x-2}{(2x-3)^2}$, $dom\ g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$$\frac{a}{(2x-3)^2} + \frac{b}{2x-3} = \frac{a + b(2x-3)}{(2x-3)^2} = \frac{2bx + a - 3b}{(2x-3)^2}$$

$$(\forall x \in dom\ g) : g(x) = \frac{2bx + a - 3b}{(2x-3)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 1 \\ a - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -2 + 3\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ainsi $g(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{(2x-3)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-3} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{(2x-3)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2x-3}$

donc $\boxed{G(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-3} + \frac{1}{4}\cdot\ln|2x-3| + k}, k \in \mathbb{R}$

Exercice 5 (5 + 4 = 9 points)

1) (5 points)

$$A(t)=\int_t^5 \ln\left(\frac{3}{x-2}\right)dx=\int_t^5\left(\ln 3-\ln(x-2)\right)dx$$

$u(x)=\ln(x-2)$ $v'(x)=1$

$u'(x)=\dfrac{1}{x-2}$ $v(x)=x$

$$=\left[x\ln 3\right]_t^5-\left[x\ln(x-2)\right]_t^5+\int_t^5\frac{x}{x-2}dx$$

$$=\left[x\ln 3-x\ln(x-2)\right]_t^5+\int_t^5\frac{x-2+2}{x-2}dx$$

$$=\left[x\ln 3-x\ln(x-2)\right]_t^5+\int_t^5 1dx+2\int_t^5\frac{1}{x-2}dx$$

$$=\left[x\ln 3-x\ln(x-2)+x+2\ln(x-2)\right]_t^5$$

$$=\left[x(1+\ln 3)+(2-x)\ln(x-2)\right]_t^5$$

$$=5(1+\ln 3)-3\ln 3-t(1+\ln 3)-(2-t)\ln(t-2)$$

$$=\boxed{5+2\ln 3-t(1+\ln 3)+(t-2)\ln(t-2)\text{ u.a.}}$$

$$\lim_{t\to 2}A(t)=\lim_{t\to 2}\left(5+2\ln 3-\underset{\to 2}{t}(1+\ln 3)+\underbrace{(t-2)\ln(t-2)}_{\to 0\,(*)}\right)=5+2\ln 3-2-2\ln 3=\boxed{3\text{ u.a.}}$$

calcul à part :

$$\lim_{t\to 2}\underbrace{(t-2)}_{\to 0}\underbrace{\ln(t-2)}_{\to -\infty}=\lim_{t\to 2}\frac{\ln(t-2)}{\frac{1}{t-2}}\overset{(H)}{=}\lim_{t\to 2}\frac{\frac{1}{t-2}}{-\frac{1}{(t-2)^2}}=\lim_{t\to 2}(2-t)=0 \quad (*)$$

2) (4 points)

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(\left(-x^2+5\right)^2-\left(-x+3\right)^2\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(x^4-10x^2+25-x^2+6x-9\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(x^4-11x^2+6x+16\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{11}{3}x^3+3x^2+16x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{32}{5}-\frac{88}{3}+12+32\right)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{11}{3}+3-16\right)$$

$$=\boxed{\frac{153}{5}\text{ u.v.}}$$