CORRIGE

Question I(23 points)

Soit la fonction f:

$$f : x \mapsto e^x x^3$$

1. Etudier la fonction:

   (a) Limites aux bornes de D_f et asymptotes éventuelles:

   (1)

$$\lim_{x \to \infty} e^x x^3 = \infty$$

   (2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^x x^3}_{F.I.} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} \left(F.I.\frac{0}{0}\right) \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{\underbrace{-e^{-x}}_{F.I.}} \left(F.I.\frac{0}{0}\right) \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{\underbrace{e^{-x}}_{F.I.}} \left(F.I.\frac{0}{0}\right) \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{-e^{-x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Donc C_f admet une A.H.:$y = 0$ en $-\infty$

   (b) Fonction dérivée et sens de variation

   (1)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x \cdot x^3 + e^x \cdot 3 \cdot x^2 \\
&= x^2 \cdot e^x \cdot (x+3)
\end{aligned}$$

   (3) Les racines de f' sont 0 et -3. Le signe de f' est celui de $x+3$.
   Tableau des variations:

x		-3		0	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$^0\searrow$	$m : y = -1,3$	$\nearrow$	0	$\nearrow^{+\infty}$

$$f(-3) = e^{-3}(-3)^3 \approx -1.3443$$

(c) Fonction dérivée seconde et concavité

(1)

$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^x\left(x^3+3x^2\right)+e^x\left(3x^2+6x\right)\\
&= e^x\left(x^3+6x^2+6x\right)\\
&= x\cdot\left(x^2+6x+6\right)\cdot e^x
\end{aligned}$$

(4) Le signe de f'' est celui de $x\cdot\left(x^2+6x+6\right)$

$$\Delta = 12; x=\frac{-6\pm2\sqrt{3}}{2}=-3\pm\sqrt{3}$$

Tableau de concavité:

x		$-3-\sqrt{3}$		$-3+\sqrt{3}$		0	
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2+6x+6	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
f	$\cap$	$I_1(-4,7;-0,9)$	$\cup$	$I_2(-1,3;-0,6)$	$\cap$	$I_3=O$	$\cup$

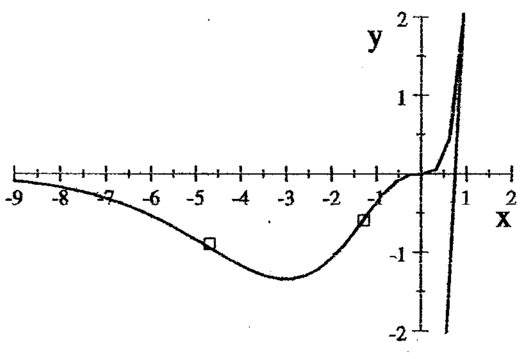
$$f\left(-3-\sqrt{3}\right)=e^{-3-\sqrt{3}}\left(-3-\sqrt{3}\right)^3\approx-0.9$$

$$f\left(-3+\sqrt{3}\right)=e^{-3+\sqrt{3}}\left(-3+\sqrt{3}\right)^3\approx-0.6$$

(d) (2)

$$\begin{aligned}
x &= 1; f(1)=e; f'(1)=4e\\
T_1 &\equiv y-e=4e(x-1)\Leftrightarrow y=4ex-3e
\end{aligned}$$

(e) (4) Représentation graphique dans un repère $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé.



2. (a) (1)Montrer que la fonction F est une primitive de f :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)\right]' \\ &= e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+e^x\left(3x^2-6x+6\right) \\ &= e^x\left(x^3-3x^2+6x-6+3x^2-6x+6\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(b) (2) Calculer l'aire délimitée par Ox et la courbe C_f sur $[\lambda;0]$ où λ est un réel strictement négatif.

$$\begin{aligned} f &< 0 \text{ sur } [\lambda;0] \\ A(\lambda) &= \int_\lambda^0 -f(x)\,dx \\ &= \int_0^\lambda f(x)\,dx \\ &= [F(x)]_0^\lambda \\ &= e^\lambda\left(\lambda^3-3\lambda^2+6\lambda-6\right)-e^0\left(0^3-3\cdot 0^2+6\cdot 0-6\right) \\ &= e^\lambda\left(\lambda^3-3\lambda^2+6\lambda-6\right)+6u.a. \end{aligned}$$

(c) (2) En déduire l'aire délimitée par Ox et la courbe C_f sur IR_-

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\lambda\to-\infty} A(\lambda) \\ &= \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{\lambda^3-3\lambda^2+6\lambda-6}{e^{-\lambda}}+6 \\ &= \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{3\lambda^2-6\lambda+6}{-e^{-\lambda}}+6 \\ &= \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{6\lambda-6}{e^{-\lambda}}+6 \\ &= \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{6}{-e^{-\lambda}}+6 \\ &= 6\ u.a. \end{aligned}$$

Question II(16 points)

1. (2)

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R} \\ & e^{2x+1}+2e^{x+1}-e^x<2 \\ \Leftrightarrow\ & e\cdot(e^x)^2+(2\cdot e-1)\cdot e^x-2<0 \end{aligned}$$

(2) Posons: $y=e^x \Rightarrow y>0$:

$$\begin{aligned} & ey^2+y(2e-1)-2<0 \\ \Delta &= (2e+1)^2>0; y_1=-2; y_2=e^{-1} \end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
2 &< y < e^{-1} \Leftrightarrow -2 < e^x < e^{-1} \\
&\Leftrightarrow -\infty < x < -1 \quad car\ e^x \nearrow \\
S &=]-\infty;-1[
\end{aligned}
$$

2. (1) Conditions d'existence:

$$
(x-1>0) \wedge (4-3x>0) \Rightarrow D = \left]1;\frac{4}{3}\right[
$$

(3) Résolution sur D:

$$
\begin{aligned}
\log_{0,5}(x-1) &\leq [\log_{0,5}(4-3x)] - 1 \\
&\Leftrightarrow \log_{0,5}(x-1) + \log_{0,5} 0.5 \leq \log_{0,5}(4-3x) \\
&\Leftrightarrow \log_{0,5}\frac{x-1}{2} \leq \log_{0,5}(4-3x) \\
&\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} \geq 4-3x \ car\ 0,5<1 \\
&\Leftrightarrow x-1 \geq 8-6x \\
&\Leftrightarrow x \geq \frac{9}{7} \\
S &= \left[\frac{9}{7};\frac{4}{3}\right[
\end{aligned}
$$

3. (a) (3) Alors:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}\right)^{2x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{2x}\right)
\end{aligned}
$$

Posons:

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{2}{t}+1 \\
x &\to \infty \Leftrightarrow t \to 0^+
\end{aligned}
$$

Alors:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{2x}\right) &= \lim_{t\to0^+}\left(\left[(1+t)^{\frac{4}{t}+2}\right]\right) \\
&= \lim_{t\to0^+}\left(\left[[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^4\cdot(1+t)^2\right]\right) \\
&= e^4\cdot(1+0^2) \\
&= e^4
\end{aligned}
$$

(b) (1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\log_{\sqrt{e}}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{2x}\right) &= \log_{\sqrt{e}}\left[e^4\right]\\ &= \log_{\sqrt{e}}\sqrt{e}^8\\ &= 8\end{aligned}$$

4. (2)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0^-}\frac{\arccos(e^x)}{\sin x}\left(F.I.\frac{0}{0}\right)\\ &\overset{H}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}}{\cos x}\\ =&\ -\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\underbrace{\sqrt{1-e^{2x}}}_{\to+\infty}}\frac{1}{\underbrace{\cos x}_{\to1}}\\ =&\ -\infty\end{aligned}$$

Question III (14 points)

1. Cours EM 6.6 P57
2. (2) conditions:

$$\begin{aligned}(x>0)\wedge(x\ln x\neq0)\wedge e &\in I\Leftrightarrow(x>0)\wedge(x\neq1)\wedge e\in I\\ I &=]1;+\infty[\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\ln x^2-\ln^2 x}{x\ln x}dx &= \int\frac{1+2\ln x-\ln^2 x}{x\ln x}dx\\ &= \int\left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x}\ln x\right)dx\\ &= \ln|\ln x|+2\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x+k\end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}\ln|\ln e|+2\ln e-\frac{1}{2}\ln^2 e+k &= 0\\ &\Leftrightarrow 0+2-\frac{1}{2}+k=0\\ &\Leftrightarrow k=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

D'où:

$$F(x) = \ln|\ln x| + 2\ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{3}{2}$$

3. (4) *I.p.p.*

$$\int 1 \cdot \arctan 2x dx$$
$$= x \cdot \arctan 2x - \int \frac{2x}{1+4x^2} dx$$
$$= x \cdot \arctan 2x - \frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right| + k$$

Question IV(7 points)

Soit la fonction f :

$$f : x \mapsto x - \frac{xe^x}{e^x - e}$$

1. Déterminer son asymptote oblique:

   (2)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{xe^x}{e^x-e}\right) = -\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x}\frac{x}{1-e\cdot e^{-x}}\right) = -\infty$$

   Donc pas d'$A.O \equiv y = x$ en $+\infty$

   (2)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{xe^x}{e^x-e}\right) = -\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x}\frac{x}{1-e\cdot e^{-x}}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e\cdot e^{-x}}\right) = 0$$

   Donc: $A.O. \equiv y = x$ en $-\infty$

2. (3) Pour déterminer la position de C_f par rapport à l'A.O, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - x$:

x		0		1	
$-x$	+	0	−		−
e^x	+		+		+
$e^x - e$	−		−	0	+
$f(x) - x$	−	0	+		−
Position	$C_f < A.O.$	$C_f = A.O.$	$C_f > A.O.$	‖	$C_f < A.O.$

figure non requise