LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 2	**B**	*Durée de l'épreuve :* 4h20 *Date de l'épreuve :* 25 mai 2020

Partie obligatoire (48 points)

Question 1 (1,5+4+3,5+3,5+1,5+2=16 points)

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln\dfrac{x+4}{2x+4} & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{5}{4}x-e^{-\frac{2}{x}} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

a) Conditions d'existence : Pour $x\le 0$: $\dfrac{x+4}{2x+4}>0 \Leftrightarrow x\in\left(\left]-\infty;-4\right[\cup\left]-2;+\infty\right[\right)\cap\left]-\infty;0\right]$

Donc : $x\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]-2;0\right]$

Pour $x>0$: $x\neq 0$

Donc : $x\in\left]0;+\infty\right[$

$\boxed{D_f=\left]-\infty;-4\right[\cup\left]-2;+\infty\right[}$ 0,5 p

Étude de la continuité en 0 :

$$f(0)=0-\ln 1=0=\lim_{x\to 0^-}f(x) \text{ et } \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{5}{4}x-\underbrace{e^{\overbrace{-\frac{2}{x}}^{\to-\infty}}}_{\to 0}\right)=0=f(0)$$

La fonction f est donc continue en 0 et $\boxed{D_cf=D_f}$. 1 p

b) $$\lim_{x\to(-4)^-}f(x)=\lim_{x\to(-4)^-}\left(x-\underbrace{\ln\overbrace{\frac{x+4}{2x+4}}^{\to 0^+}}_{\to-\infty}\right)=+\infty$$ $\boxed{A.V.\quad x=-4}$ 0,5 p

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\left(x-\underbrace{\ln\overbrace{\frac{x+4}{2x+4}}^{\to+\infty}}_{\to+\infty}\right)=-\infty$$ $\boxed{A.V.\quad x=-2}$ 0,5 p

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\underbrace{\ln\overbrace{\frac{x+4}{2x+4}}^{\to\frac{1}{2}}}_{\to-\ln 2}\right)=-\infty$$ pas d'*A.H.*

A.O. à gauche ?

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\underbrace{\frac{\ln\frac{x+4}{2x+4}}{x}}_{\to 0}\right)=1 \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\ln\frac{x+4}{2x+4}\right)=\ln 2$$

En $-\infty$: $\boxed{A.O.\quad y=x+\ln 2}$ 1,5 p

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{4}x-\underbrace{e^{-\frac{2}{x}}}_{\to 1}\right)=+\infty$ pas d'*A.H.*

A.O. à droite ?

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{4}-\underbrace{\frac{\overbrace{e^{-\frac{2}{x}}}^{\to 1}}{x}}_{\to 0}\right)=\frac{5}{4} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{5}{4}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-\frac{2}{x}}\right)=-1$$

En $+\infty$: $\boxed{A.O.\quad y=\frac{5}{4}x-1}$ 1,5 p

c) $\forall x\in\,]-\infty;-4[\,\cup\,]-2;0[$:

$$f'(x)=1-\frac{2x+4}{x+4}\cdot\frac{(2x+4)\cdot 1-(x+4)\cdot 2}{(2x+4)^2}=1-\frac{-4}{(x+4)(2x+4)}=\frac{2x^2+12x+20}{(x+4)(2x+4)}=\frac{x^2+6x+10}{\underbrace{(x+4)(x+2)}_{>0}}$$

1 p

$\forall x\in\,]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{5}{4}-e^{-\frac{2}{x}}\cdot\frac{2}{x^2}=\frac{5}{4}-\frac{2}{x^2\cdot e^{\frac{2}{x}}}$$

0,5 p

Étude de la dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\underbrace{\frac{x-\ln\frac{x+4}{2x+4}}{x}}_{f.i.\frac{0}{0}}\underset{\boxed{H}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+6x+10}{(x+4)(x+2)}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{5}{4}x-e^{-\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{5}{4}-\underbrace{\frac{e^{-\frac{2}{x}}}{x}}_{f.i.\frac{0}{0}}\right)\underset{(*)}{=}\frac{5}{4}$$

$$(*)\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{2}{x}}}\underset{\boxed{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{-2}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}}\right)=0$$

La fonction *f* est dérivable en 0 et $\boxed{D_{f'}=D_f}$. 2 p

d) Pour $x\in\,]-\infty;-4[\,\cup\,]-2;0[$: $f'(x)>0$

Pour $x=0$: $f'(x)=\frac{5}{4}$

Pour $x\in\,]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{5}{4}-\underbrace{\frac{2}{x^2\cdot e^{\frac{2}{x}}}}_{g(x)}$ signe ?

$$g'(x)=-\frac{-2\left(2x\cdot e^{\frac{2}{x}}+x^2\cdot e^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{-2}{x^2}\right)}{x^4\cdot e^{\frac{4}{x}}}=\frac{4xe^{\frac{2}{x}}-4e^{\frac{2}{x}}}{x^4\cdot e^{\frac{4}{x}}}=\frac{4(x-1)}{x^4\cdot e^{\frac{2}{x}}}$$

1 p

Tableau des variations de g : **1 p**

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	P	$-$	0	$+$	
$g(x)=f'(x)$	P	]	min 0,98	Z	

$$g(1)=\underbrace{\frac{5}{4}}_{>1}-\underbrace{\frac{2}{e^2}}_{<1}>0 \qquad \left(g(1)\approx 0{,}98\right)$$

Donc : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[: f'(x)>0$.

Tableau des variations de f : **1,5 p**

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	P		P	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	Z	$+\infty$ P		P $-\infty$	Z	$+\infty$

e) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$: $\quad f''(x)=g'(x)=\dfrac{4(x-1)}{x^4e^{\frac{2}{x}}}$ et f'' s'annule et change de signe en 1.

$$f(1)=\frac{5}{4}-\frac{1}{e^2}\ ; \qquad f'(1)=\frac{5}{4}-\frac{2}{e^2}.$$

Point d'inflexion : $I\left(1;\frac{5}{4}-\frac{1}{e^2}\right)$ **0,5 p**

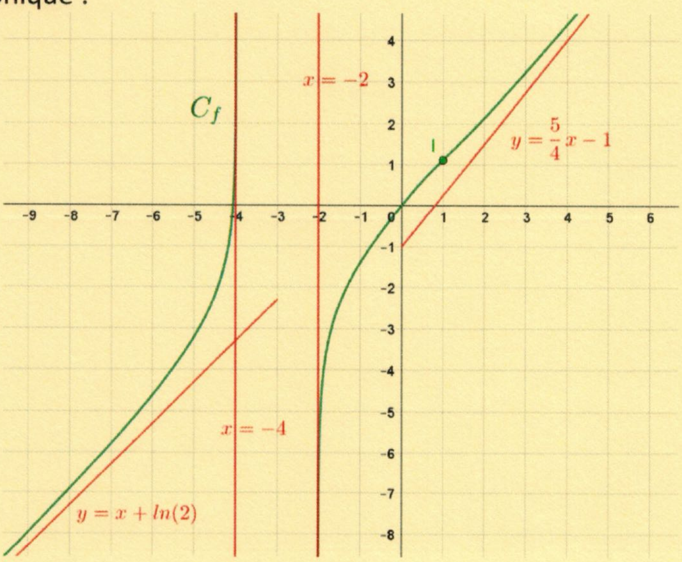
Équation de la tangente à C_f en I :

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$$

$$y-\frac{5}{4}+\frac{1}{e^2}=\left(\frac{5}{4}-\frac{2}{e^2}\right)(x-1)$$ **1 p**

$$y=\left(\frac{5}{4}-\frac{2}{e^2}\right)\cdot x+\frac{1}{e^2}$$

f) Représentation graphique : **2 p**



Question 2 (5+7+4=16 points)

a) $\log_6 e \cdot \ln\left(e^x - 1\right) = 1 - x \cdot \log_6 e \qquad (*)$

Condition d'existence :

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

$D = \left]0;+\infty\right[$

$\forall x \in D : (*) \Leftrightarrow \dfrac{\ln e}{\ln 6} \cdot \ln\left(e^x - 1\right) = 1 - x \cdot \dfrac{\ln e}{\ln 6} \quad \left| \cdot \ln 6\right.$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^x - 1\right) = \ln 6 - x$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^x - 1\right) = \ln 6 - \ln e^x$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^x - 1\right) + \ln e^x = \ln 6$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\left(e^x - 1\right)\right) = \ln 6$

$\Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 6 = 0$

Posons : $y = e^x$.

L'équation s'écrit alors $y^2 - y - 6 = 0$ et a pour solutions $y_1 = -2$ et $y_2 = 3$.

Revenant à l'inconnue x : $\underbrace{e^x = -2}_{\text{impossible}}$ ou $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3 \in D$.

$S = \left\{\ln 3\right\}$

b) $4^x - e \cdot 2^{1-x} \le \left(3 + e\right) \cdot 2^x - 2 - 3e$

$\Leftrightarrow 2^{2x} - 2e \cdot 2^{-x} \le \left(3 + e\right) \cdot 2^x - 2 - 3e \quad \left| \cdot \underbrace{2^x}_{>0}\right.$

$\Leftrightarrow 2^{3x} - 2e \le \left(3 + e\right) \cdot 2^{2x} - \left(2 + 3e\right) \cdot 2^x$

$\Leftrightarrow 2^{3x} - \left(3 + e\right) \cdot 2^{2x} + \left(2 + 3e\right) \cdot 2^x - 2e \le 0$

Posons : $y = 2^x$.

L'inéquation s'écrit alors :

$\underbrace{y^3 - \left(3 + e\right)y^2 + \left(2 + 3e\right)y - 2e}_{P(y)} \le 0$

$P\left(1\right) = 1 - 3 - e + 2 + 3e - 2e = 0$

$P\left(y\right)$ est divisible par $y - 1$.

Schéma de Horner :

	1	$-3-e$	$2+3e$	$-2e$
1		1	$-2-e$	$2e$
	1	$-2-e$	$2e$	0

$P\left(y\right) = \left(y - 1\right) \cdot \left(y^2 - \left(2 + e\right)y + 2e\right)$

$\Delta = \left(2 + e\right)^2 - 8e = 4 - 4e + e^2 = \left(2 - e\right)^2$

$y_1 = \dfrac{2 + e - \left|2 - e\right|}{2} = \dfrac{2 + e - \left(e - 2\right)}{2} = 2$ et $y_2 = \dfrac{2 + e + e - 2}{2} = e$

Signe de $P(y)$:

y	$-\infty$		1		2		e		$+\infty$
$y-1$		-	0	+		+		+	
$y^2-(2+e)y+2e$		+		+	0	-	0	+	
$P(y)$		-	0	+	0	-	0	+	

$P(y)\le 0 \Leftrightarrow y\le 1$ ou $2\le y\le e$

Revenant à l'inconnue x :

$2^x\le 1$ ou $2\le 2^x\le e \Leftrightarrow x\le 0$ ou $1\le x\le \dfrac{1}{\ln 2}$

$S=\left]-\infty;0\right]\cup\left[1;\dfrac{1}{\ln 2}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+Arc\sin x\right)^{\ln x}$ forme indéterminée : 1^∞

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+Arc\sin x\right)^{\ln x}=\lim_{x\to 0^+} e^{\ln x\cdot\ln(1+Arc\sin x)}\underset{(*)}{=}e^0=1$$

$(*)$ Calcul à part :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\ln\left(1+Arc\sin x\right)\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+Arc\sin x\right)}{\frac{1}{\ln x}}\underset{\boxed{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+Arc\sin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(1+Arc\sin x\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}}_{1}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{-\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{-\frac{1}{x}}\underset{\boxed{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{\boxed{H}}{=}2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

__Question 3 (2+2,5+1,5=6 points)__

$f(x)=x^{\ln(\ln x)}=e^{\ln(\ln x)\cdot\ln x}$

a) Conditions d'existence :

- $x>0$
- $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$

$D_f=\left]1;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(\ln x)\cdot\ln x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}e^{\overbrace{\ln(\ln x)}^{\to-\infty}\cdot\overbrace{\ln x}^{\to 0^+}}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\ln(\ln x)\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\ln x}}\underset{\boxed{H}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}}=\lim_{x\to 1^+}(-\ln x)=0$$

D'où : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = e^0 = 1$

b) $D_{f'} =]1;+\infty[$

$$f'(x) = e^{\ln(\ln x)\cdot\ln x}\cdot\left(\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x + \ln(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right) = \underbrace{e^{\ln(\ln x)\cdot\ln x}\cdot\frac{1}{x}}_{>0}\cdot\left(1+\ln(\ln x)\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1+\ln(\ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln(\ln x) = \ln\left(e^{-1}\right) \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{e}}$$

c) $f\left(e^e\right) = e^{\ln(\ln e^e)\cdot\ln(e^e)} = e^{\ln e\cdot e} = e^e$ et $f'\left(e^e\right) = e^e\cdot\frac{1}{e^e}\left(1+\ln\left(\ln e^e\right)\right) = 2$

Équation de la tangente :

$$y - f\left(e^e\right) = f'\left(e^e\right)\cdot\left(x-e^e\right)$$

$$y - e^e = 2\cdot\left(x-e^e\right)$$

$$y = 2x - e^e$$

__Question 4 ((1+5)+4=10 points)__

a) i) $$\int\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int\underbrace{\left(1+x^2\right)^{-2}}_{u^{-2}}\cdot\underbrace{2x}_{u'}dx = -\frac{1}{2}\cdot\left(1+x^2\right)^{-1}+k = -\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}+k$$

ii) $f(x) = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{a}{1+x^2} + \frac{bx^2}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 = a\left(1+x^2\right)+bx^2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 = a+(a+b)x^2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a=1 \text{ et } b=-1$$

D'où :

$$\int f(x)dx = \int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)dx = Arc\tan x - \int\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$\int\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int\underbrace{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}}_{v'(x)}\cdot\underbrace{x}_{u(x)}dx$$

ipp : $u(x) = x \qquad v'(x) = \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) \underset{\text{par i)}}{=} -\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)}$

$$\int\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx = -\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}Arc\tan x+k$$

Donc :

$$F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}Arc\tan x + \frac{x}{2\left(1+x^2\right)}+c$$

$$F(1)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}+c=0 \Leftrightarrow c=-\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$$

Finalement, la primitive recherchée vaut : $F(x)=\frac{1}{2}Arc\tan x+\frac{x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$.

b) $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+2}dx$

Posons : $t=e^x \Leftrightarrow x=\ln t$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{t}$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+2}dx=\int \frac{t^3}{t^2+2}\cdot\frac{dt}{t}=\int \frac{t^2}{t^2+2}dt=\int \frac{t^2+2-2}{t^2+2}dt=\int\left(1-\frac{2}{t^2+2}\right)dt=t-\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt$$

$$=t-\sqrt{2}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dt=t-\sqrt{2}\cdot Arc\tan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+k=e^x-\sqrt{2}\cdot Arc\tan\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right)+k$$

Partie au choix (12 points)

Question 5 (5+5+2=12 points)

a) $\int_e^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$ ipp : $u(x)=\ln^2 x$ $v'(x)=x^{-2}$

$u'(x)=\frac{2\ln x}{x}$ $v(x)=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x}$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\right]_e^{e^2}+2\cdot\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$=-\frac{4}{e^2}+\frac{1}{e}+2\cdot\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx$$

ipp: $u(x)=\ln x$ $v'(x)=x^{-2}$

$u'(x)=\frac{1}{x}$ $v(x)=-\frac{1}{x}$

$$=-\frac{4}{e^2}+\frac{1}{e}+2\cdot\left(\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\frac{1}{x^2}dx\right)$$

$$=-\frac{4}{e^2}+\frac{1}{e}+2\cdot\left(-\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_e^{e^2}\right)$$

$$=-\frac{4}{e^2}+\frac{1}{e}-\frac{4}{e^2}+\frac{2}{e}-\frac{2}{e^2}+\frac{2}{e}$$

$$=\frac{5}{e}-\frac{10}{e^2}=\frac{5(e-2)}{e^2}\approx 0{,}486$$

b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{1-\sin x}dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{1-\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}dx$

Posons : $t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2Arc\tan t$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Leftrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Changement des bornes : si $x = -\frac{\pi}{3}$, alors $t = \tan\frac{-\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

si $x = \frac{\pi}{3}$, alors $t = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{1-\sin x}dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{1-\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{3}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 6\cdot\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{1+t^2-2t}$$

$$= 6\cdot\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{(t-1)^2} = 6\cdot\left[-\frac{1}{t-1}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 6\cdot\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= 6\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right) = 6\cdot\left(\frac{3}{3-\sqrt{3}} - \frac{3}{3+\sqrt{3}}\right)$$

$$= 6\cdot\frac{3\left(3+\sqrt{3}\right)-3\left(3-\sqrt{3}\right)}{9-3} = 6\sqrt{3}$$

c) $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1+4\tan^2 x}dx$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{1+\left(2\tan x\right)^2}\cdot\frac{2}{\cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot Arc\tan\left(2\tan x\right) + k$$

__Question 6 (4+4+4=12 points)__

$f_m(x) = x + m\cdot e^{-x} \qquad (m \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$

a) $D_{f_m} = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x}_{\to\infty} + \underbrace{m\cdot e^{-x}}_{\to 0}\right) = +\infty$$

À droite, C_{f_m} n'admet pas d'asymptote horizontale mais une asymptote oblique d'équation $y = x$.

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{x}_{\to-\infty} + \underbrace{m\cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}}_{\to\pm\infty}\right)$$

Pour $\boxed{m>0}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\underbrace{x}_{\to-\infty} + \underbrace{m\cdot e^{-x}}_{\to+\infty}}_{\text{F.I.}}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\left(1+m\cdot\frac{e^{-x}}{x}\right) = "(-\infty)\cdot(-\infty)" = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x} \underset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(-e^{-x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+m\cdot\frac{e^{-x}}{x}\right) = -\infty$$

[Branche parabolique de direction (Oy) à gauche.]

Pour $\boxed{m<0}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{x}_{\to-\infty} + \underbrace{m\cdot e^{-x}}_{\to-\infty}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+m\cdot\frac{e^{-x}}{\underbrace{x}_{\to-\infty}}\right) = +\infty$$

[Branche parabolique de direction (Oy) à gauche.]

b) $D_{f_m'} = \mathbb{R}$

$f_m'(x) = 1 - m\cdot e^{-x}$

$f_m'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - m\cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{m}$

Pour $m<0$, cette équation n'a pas de solution et $f_m'(x) > 0$.

Pour $m>0$, $e^{-x} = \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\dfrac{1}{m}\right) \Leftrightarrow -x = -\ln m \Leftrightarrow x = \ln m$.

$\boxed{m>0}$

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	]	$1+\ln m$	Z	$+\infty$

$f_m'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - m\cdot e^{-x} > 0 \Leftrightarrow m\cdot e^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow -x < -\ln m \Leftrightarrow x > \ln m$

$f_m(\ln m) = \ln m + m\cdot e^{-\ln m} = \ln m + m\cdot\dfrac{1}{m} = 1+\ln m$

$\boxed{m<0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	Z	$+\infty$

c) Équation de la tangente à C_{f_m} en un point de C_{f_m} de coordonnées $(a, f_m(a))$:

$$y - f_m(a) = f_m'(a) \cdot (x - a)$$

$$y - \left(a + m \cdot e^{-a}\right) = \left(1 - m \cdot e^{-a}\right) \cdot (x - a)$$

Comme l'origine doit appartenir à cette tangente, on a :

$$0 - \left(a + m \cdot e^{-a}\right) = \left(1 - m \cdot e^{-a}\right) \cdot (0 - a)$$

$$-a - m \cdot e^{-a} = -a + m \cdot a \cdot e^{-a}$$

$$-m \cdot e^{-a} = m \cdot a \cdot e^{-a} \quad \left| : \left(m \cdot e^{-a}\right) \neq 0\right.$$

$$a = -1$$

Coordonnées du point de contact : $(-1; -1 + m \cdot e)$.

Équation de t_m : $y - (-1 + m \cdot e) = (1 - m \cdot e) \cdot (x + 1)$

$$y + 1 - me = (1 - me) \cdot x + 1 - me$$

$$y = (1 - me) \cdot x$$

Question 7 (5+7=12 points)

a) $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

$D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x} \cdot (1 - x)$

$f''(x) = e^{1-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x) + e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x} \cdot (x - 2)$

La dérivée seconde s'annulant et changeant de signe en $x = 2$, C_f admet un point d'inflexion $I\left(2; \frac{2}{e}\right)$.

Équation de la tangente au point d'inflexion :

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e} \cdot (x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e}$$

Aire demandée :

$$A = \int_0^2 \left(-\frac{1}{e}x + \frac{4}{e} - f(x)\right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{e}x + \frac{4}{e} - x \cdot e^{1-x}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2e}\left[x^2\right]_0^2 + \frac{4}{e}[x]_0^2 - \int_0^2 xe^{1-x}dx = -\frac{1}{2e} \cdot 4 + \frac{4}{e} \cdot 2 - e \cdot \int_0^2 xe^{-x}dx$$

$$= -\frac{2}{e} + \frac{8}{e} - e \cdot \underbrace{\int_0^2 xe^{-x}dx}_{I} = \frac{6}{e} - e \cdot I$$

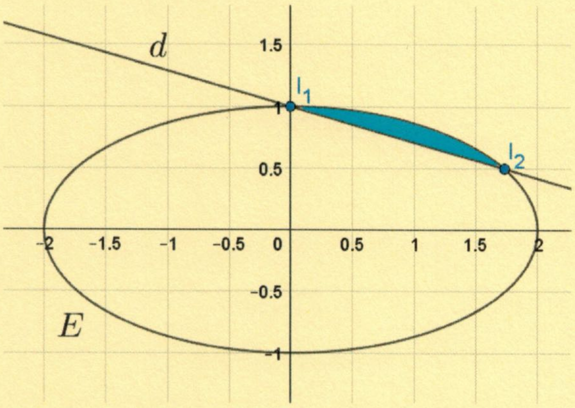
Calcul de I :

$$I = \int_0^2 x \cdot e^{-x}dx \qquad \text{i.p.p.} \quad \begin{array}{ll} u(x) = x & v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -e^{-x} \end{array}$$

$$I = \left[-xe^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}dx = -\frac{2}{e^2} + \left[-e^{-x}\right]_0^2 = -\frac{2}{e^2} + \frac{-1}{e^2} + 1 = 1 - \frac{3}{e^2}$$

$$A=\frac{6}{e}-e+\frac{3}{e}=\frac{9}{e}-e\approx 0{,}59\,u.a.$$

b)



$E\equiv\frac{x^2}{4}+y^2=1\Leftrightarrow x^2+4y^2=4 \qquad (1)$

$d\equiv y=-\frac{\sqrt{3}}{6}x+1 \qquad (2)$

Intersection de E et d :

(2) dans (1) : $x^2+4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}x+1\right)^2=4\Leftrightarrow x^2+4\left(\frac{x^2}{12}-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1\right)=4$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{x^2}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}x=0\Leftrightarrow 4x^2-4\sqrt{3}x=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\sqrt{3}$$

La droite d coupe l'ellipse E en deux points $I_1(0;1)$ et $I_2\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$.

$E\equiv\frac{x^2}{4}+y^2=1\Leftrightarrow y^2=1-\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

Aire de la surface S :

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\frac{\sqrt{3}}{6}x-1\right)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx+\left[\frac{\sqrt{3}}{12}x^2-x\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\underbrace{\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx}_{I}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=I-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Calcul de I :

$I=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx$ Posons : $\frac{x}{2}=\cos t\Leftrightarrow x=2\cos t$

$\frac{dx}{dt}=-2\sin t\Leftrightarrow dx=-2\sin t\,dt$

Si $x=0$, alors $\cos t=0$ et $t=\frac{\pi}{2}$

Si $x=\sqrt{3}$, alors $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $t=\frac{\pi}{6}$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\cos^2 t}\left(-2\sin t dt\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\underbrace{\sin t}_{\geq 0}\right|\cdot 2\sin t dt=2\cdot\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt$$

$$=2\cdot\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Aire de la surface S : $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}18\ u.a.$