LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES
2018

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques II	**B**	*Durée de l'épreuve :* *4 heures* *Date de l'épreuve :*

I (5 + 3 = 8 points)

Résoudre :

1) $\log_2(1-x)+\log_{\frac{1}{2}}\left|4x-x^2\right| \geq \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{2-x}\right)$

2) $(2x-3)^{\sqrt{x-1}}=\left(\sqrt{2x-3}\right)^{x-1}$

II (2 + 1 + 4 + 5 + 5 + 3 + 2 + 2 = 24 points)

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x)=\ln\left(e^x - me^{-x}\right)$ ($m \in \mathbb{R}$) et soit G_m son graphe dans un repère orthonormé du plan.

1) Déterminer *dom* f_m en discutant suivant les valeurs de *m*.

2) Identifier G_0 (sans le tracer).

Dans la suite de l'exercice, on choisit $m \neq 0$ *et on discutera suivant les valeurs de m si nécessaire.*

3) Démontrer que la droite *d* d'équation $y=x$ est asymptote oblique à G_m en $+\infty$, puis étudier la position de G_m par rapport à *d*.

4) Déterminer les autres asymptotes à G_m .

5) Etudier les variations de f_m .

6) En déduire le nombre de racines de f_m .

7) Etudier la concavité de f_m .

8) Représenter G_{-1} et G_1 avec toutes ses asymptotes dans un repère orthonormé du plan.

III (4 + 5 = 9 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

1) Déterminer le domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de f.

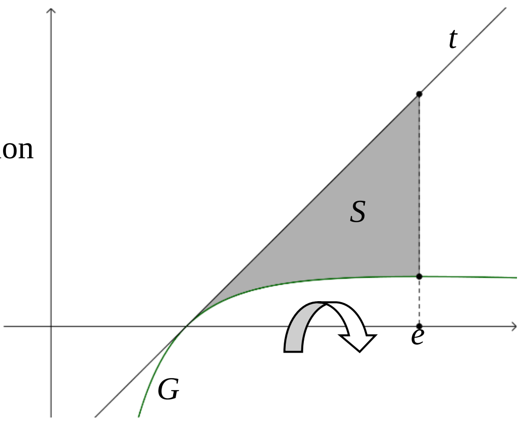
2) Déterminer les équations de toutes les tangentes au graphe de f passant par le point $P\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

IV (2 + 5 = 7 points)

1) Etudier le signe de la fonction f définie par $f(x) = x \cdot \ln\left(2x^2 - 2x + 1\right)$.

2) En déduire la valeur exacte de l'aire de la surface fermée comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

V (5 points)



Dans le repère ci-contre on donne le graphe G de la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ainsi que sa tangente t au point d'intersection de G avec l'axe des abscisses.
Soit S la surface comprise entre G, la droite t et la droite d'équation $x = e$.
Déterminer le volume exact du solide engendré par la rotation de S autour de l'axe des abscisses, puis donner une valeur arrondie au millième de ce volume.

VI (3 + 4 = 7 points)

1) Déterminer l'intégrale indéfinie $\int \frac{1}{\sin^3 x}\, dx$ sur l'intervalle $I =]0\,;\,\pi[$.

2) On donne la fonction f définie sur l'intervalle $J = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$.

Déterminer la primitive F de f sur J qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

(Indication : Une méthode possible est de faire une intégration par parties.)
