Mathématiques II – Epreuve écrite − Corrigé

I **1)** $\boxed{\log_2(1-x)+\log_{\frac{1}{2}}\left|4x-x^2\right| \ge \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2-x}}$ (I)

C.E. : 1) $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

2) $4x-x^2 \ne 0 \Leftrightarrow x\ne 0$ et $x \ne 4$

3) $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$

D =]–∞ ; 0[∪]0 ; 1[

$\forall\, x \in D$: (I) $\Leftrightarrow \dfrac{\ln(1-x)}{\ln 2}+\dfrac{\ln\left|4x-x^2\right|}{-\ln 2} \ge \dfrac{\ln\sqrt{2-x}}{-\frac{1}{2}\ln 2} \quad \Big|\cdot \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln(1-x)-\ln\left|4x-x^2\right| \ge -\ln(2-x)$

$\Leftrightarrow \ln(1-x)+\ln(2-x) \ge \ln\left|4x-x^2\right|$

$\Leftrightarrow (1-x)\cdot(2-x) \ge \left|4x-x^2\right|$

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;0[$: (I) $\Leftrightarrow (1-x)\cdot(2-x) \ge x^2-4x$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2 \ge x^2-4x$

$\Leftrightarrow x \ge -2$ $\qquad S_1 = [-2\,;0[$

$\forall\, x \in\,]0\,;1[$: (I) $\Leftrightarrow (1-x)\cdot(2-x) \ge 4x-x^2$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2 \ge 4x-x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-7x+2 \ge 0 \qquad \Delta = 33$

$\Leftrightarrow x \ge \underbrace{\tfrac{7+\sqrt{33}}{4}}_{\approx 3{,}19}$ ou $x \le \underbrace{\tfrac{7-\sqrt{33}}{4}}_{\approx 0{,}31}$ $\qquad S_2 = \left]0\,;\tfrac{7-\sqrt{33}}{4}\right]$

$S = S_1 \cup S_2 = [-2\,;0[\, \cup \left]0\,;\tfrac{7-\sqrt{33}}{4}\right]$

2) $\boxed{(2x-3)^{\sqrt{x-1}} = \left(\sqrt{2x-3}\right)^{x-1}}$ (E)

C.E.: 1) $2x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$

2) $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$

D = $\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

$\forall\, x \in D$: (E) $\Leftrightarrow e^{\sqrt{x-1}\ln(2x-3)} = e^{(x-1)\ln\sqrt{2x-3}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\ln(2x-3) = (x-1)\cdot\frac{1}{2}\ln(2x-3)$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}(x-1)\right]\cdot\ln(2x-3)=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x-1}}_{\ne 0}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{x-1}\right)\cdot\ln(2x-3)=0$

$\Leftrightarrow 2=\sqrt{x-1}$ ou $\ln(2x-3)=0$

$\Leftrightarrow 4 = x-1$ ou $2x-3=1$

$\Leftrightarrow x=5$ ou $x=2$

$S = \{2; 5\}$

II $\boxed{f_m(x)=\ln\left(e^x-me^{-x}\right)}$

1) C.E. : $e^x-me^{-x}>0$ (I)

Si $\boxed{m\le 0}$, alors (I) est vérifié $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $dom f_m=\mathbb{R}$

Si $\boxed{m>0}$, alors (I) $\Leftrightarrow\ e^x>me^{-x}\ \Leftrightarrow\ e^{2x}>m\ \Leftrightarrow\ 2x>\ln m\ \Leftrightarrow\ x>\ln\sqrt{m}$, $dom f_m=]\ln\sqrt{m}\ ;+\infty[$

2) $\forall\, x\in\mathbb{R}$: $f_0(x)=\ln\left(e^x\right)=x$

G_0 est la droite d'équation $y=x$ (première bissectrice du repère).

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f_m(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-me^{-x}\right)-\ln e^x\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x-me^{-x}}{e^x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1-\underbrace{me^{-2x}}_{\to 0})$

$=0$ A.O.D. : $y=x$

$\forall\, x\in dom f_m$: $\varphi_m(x)=f_m(x)-x=\ln(1-me^{-2x})$

$\varphi_m(x)=0\ \Leftrightarrow\ 1-me^{-2x}=1\ \Leftrightarrow\ -me^{-2x}=0$ impossible

$\varphi_m(x)>0\ \Leftrightarrow\ 1-me^{-2x}>1\ \Leftrightarrow\ -me^{-2x}>0\ \Leftrightarrow\ m<0$

Si $\boxed{m<0}$, alors G_m est située au-dessus de d.

Si $\boxed{m>0}$, alors G_m est située en dessous de d.

4) Si $\boxed{m<0}$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\underbrace{e^x}_{\to 0}-m\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty})=+\infty$ pas d'A.H.G.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_m(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(e^x-me^{-x})\to+\infty}{x\qquad\to-\infty}$

$\underset{H}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+me^{-x}}{e^x-me^{-x}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}\cdot(e^{2x}+m)}{e^{-x}\cdot(e^{2x}-m)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}+m\to m}{e^{2x}-m\to -m}$

$=-1$

Autre méthode :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_m(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln e^{-x}\cdot(e^{2x}-m)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln e^{-x}+\ln(e^{2x}-m)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\dfrac{\ln(e^{2x}-m)}{x}\right)$

$=-1$ $\quad\Big\|\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(e^{2x}-m)\to\ln(-m)}{x\qquad\to-\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f_m(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(e^x-me^{-x})+\ln e^x\right]$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^{2x}-m)$

$=\ln(-m)$ A.O.G. : $y=-x+\ln(-m)$

Si $\boxed{m>0}$: $\lim\limits_{x\to\ln\sqrt{m}}f_m(x)=\lim\limits_{x\to\ln\sqrt{m}}\ln(\underbrace{\underbrace{e^x}_{\to\sqrt{m}}-m\underbrace{e^{-x}}_{\to\frac{1}{\sqrt{m}}}}_{\to 0^+})=-\infty$ A.V. : $x=\ln\sqrt{m}$

5) $domf'_m = domf_m$

$\forall\, x \in\, domf'_m$: $f'_m(x) = \dfrac{e^x + me^{-x}}{e^x - me^{-x}} = \dfrac{e^{2x} + m}{e^{2x} - m}$

Si $\boxed{m<0}$: $f'_m(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2x} + m = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2x} = -m \;\Leftrightarrow\; 2x = \ln(-m) \;\Leftrightarrow\; x = \ln\sqrt{-m}$

x	$-\infty$		$\ln\sqrt{-m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
f_m	$+\infty$	↘	$\ln 2\sqrt{-m}$	↗	$+\infty$

Minimum : $f_m(\ln\sqrt{-m}) = \ln(\sqrt{-m} - m\cdot\frac{1}{\sqrt{-m}}) = \ln\frac{-2m}{\sqrt{-m}} = \ln 2\sqrt{-m}$ M($\ln\sqrt{-m}$; $\ln 2\sqrt{-m}$)

Si $\boxed{m>0}$: $f'_m(x) > 0$

x	$\ln\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$	‖	$+$	
f_m	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

6) Si $\boxed{m<0}$: $\ln 2\sqrt{-m} > 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{-m} > 1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{-m} > \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; -m > \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; m < -\frac{1}{4}$

On a (d'après le tableau des variations) :

Si $\underline{\underline{m < -\frac{1}{4}}}$, alors f_m n'admet aucune racine ;

Si $\underline{\underline{m = -\frac{1}{4}}}$, alors f_m admet exactement une racine (égale à $\ln\sqrt{-(-\frac{1}{4})} = \ln\sqrt{\frac{1}{4}} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$) ;

Si $\underline{\underline{0 > m > -\frac{1}{4}}}$, alors f_m admet exactement deux racines.

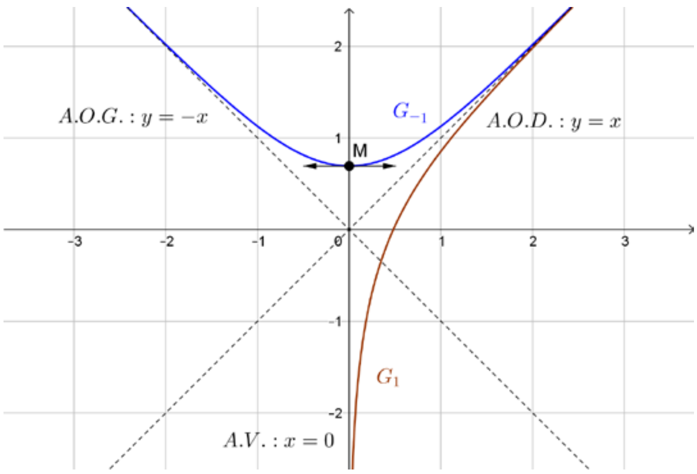
Si $\boxed{m>0}$, alors f_m admet exactement une racine (d'après le tableau des variations).

7) $\forall\, x \in\, domf'_m$: $f''_m(x) = \dfrac{\left(e^x - me^{-x}\right)^2 - \left(e^x + me^{-x}\right)^2}{\left(e^x - me^{-x}\right)^2} = \dfrac{-4m}{\left(e^x - me^{-x}\right)^2}$

Si $\boxed{m<0}$, alors $f''_m(x) > 0$ et f_m est convexe sur $domf_m$.

Si $\boxed{m>0}$, alors $f''_m(x) < 0$ et f_m est concave sur $domf_m$.

8)



III $f(x)=\left(2-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

1) dom $f=\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\underbrace{\left(2-\frac{1}{x}\right)}_{\to 2}\cdot\underbrace{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}_{\to 1}=2 \qquad \text{A.H. : } y=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\left(2-\frac{1}{x}\right)}_{\to -\infty}\cdot\underbrace{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}_{\to +\infty}=-\infty \qquad \text{A.V. : } x=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\underbrace{\left(2-\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty}\cdot\underbrace{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}_{\to 0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2-\frac{1}{x}\to+\infty}{e^{-\frac{1}{x}}\to+\infty}\underset{H}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0 \quad \text{« trou » au point } (0\,;0)$$

2) $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{1}{x^2}\cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)}+\left(2-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

$$=\frac{1}{x^2}\cdot\left(1-2+\frac{1}{x}\right)\cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{1-x}{x^3}\cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Equation de la tangente au point d'abscisse a : $t_a \equiv y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$

$$P(\tfrac{1}{2}\,;0)\in t_a \Leftrightarrow 0-\left(2-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{\left(\frac{1}{a}\right)}=\frac{1-a}{a^3}\cdot e^{\left(\frac{1}{a}\right)}\cdot\left(\frac{1}{2}-a\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2a}{a}=\frac{1-a}{a^3}\cdot\frac{1-2a}{2} \qquad \Big|\cdot 2a^3$$

$$\Leftrightarrow 2a^2\cdot(1-2a)-(1-a)(1-2a)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-2a)\left(2a^2+a-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a=\tfrac{1}{2} \text{ ou } a=-1$$

$t_{-1}\equiv y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$

$\Leftrightarrow y-3e^{-1}=-2e^{-1}\cdot(x+1)$

$\Leftrightarrow y=-\frac{2}{e}x+\frac{1}{e}$

$t_{\frac{1}{2}}\equiv y-f(\tfrac{1}{2})=f'(\tfrac{1}{2})\cdot(x-\tfrac{1}{2})$

$\Leftrightarrow y-0=4e^2\cdot(x-\tfrac{1}{2})$

$\Leftrightarrow y=4e^2x-2e^2$

IV 1) C.E.: $2x^2 - 2x + 1 > 0$ vérifié $\forall\, x \in \mathbb{R}$ car $\Delta = -4 < 0$ *dom f* $= \mathbb{R}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$: $\ln\left(2x^2 - 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

$\ln\left(2x^2 - 2x + 1\right) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 > 1 \Leftrightarrow 2x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		–	0	+		+	
$\ln\left(2x^2 - 2x + 1\right)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$		–	0	–	0	+	

2) Aire demandée : $A = -\int_0^1 f(x)dx$

Calculons :

$\int f(x)\,dx$

$= \int x \cdot \ln\left(2x^2 - 2x + 1\right) dx$

$u(x) = \ln\left(2x^2 - 2x + 1\right)$ $\quad v'(x) = \dfrac{4x-2}{2x^2 - 2x + 1}$

$u'(x) = x$ $\quad v(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

$\underset{IPP}{=} \dfrac{1}{2}x^2 \ln\left(2x^2 - 2x + 1\right) - \int \dfrac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 2x + 1} dx$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 & 2x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x^2 - x & x + \frac{1}{2} \\ \hline x^2 - x & \\ -x^2 + x - \frac{1}{2} & \\ \hline -\frac{1}{2} & \end{array}$$

$= \dfrac{1}{2}x^2 \ln\left(2x^2 - 2x + 1\right) - \int \left(x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{1}{2}}{2x^2 - 2x + 1} \right) dx$

$= \dfrac{1}{2}x^2 \ln\left(2x^2 - 2x + 1\right) - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \int \dfrac{1}{4x^2 - 4x + 2} dx$

Calculons : $\int \dfrac{1}{4x^2 - 4x + 2} dx = \int \dfrac{1}{4x^2 - 4x + 1 + 1} dx = \int \dfrac{1}{(2x-1)^2 + 1} dx$

Donc : $\int f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}x^2 \ln\left(2x^2 - 2x + 1\right) - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\text{Arctan}\left(2x - 1\right) + c \;\; (c \in \mathbb{R})$

D'où : $A = -\dfrac{1}{2}\left[x^2 \ln\left(2x^2 - 2x + 1\right) - x^2 - x + Arc\tan\left(2x - 1\right)\right]_0^1$

$= -\dfrac{1}{2}\left[\left(-1 - 1 + \dfrac{\pi}{4}\right) - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 1 - \dfrac{\pi}{4}$ u.a.

V $\boxed{f(x)=\dfrac{\ln x}{x}}$

domf = *dom f'* =]0 ; +∞[

$G \cap (Ox)$: $\forall x \in]0\,;+\infty[$: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Equation de t : $t \equiv y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$

$\Leftrightarrow y = x-1$

$\forall x \in]0\,;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(1)=1$

$$V=\pi\cdot\int_1^e\left[(x-1)^2-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right]dx$$

Calculons :

$$\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx=\int\frac{1}{x^2}\cdot\ln^2 x\,dx$$

$u(x)=\ln^2 x$	$u'(x)=\frac{2\ln x}{x}$
$v'(x)=\frac{1}{x^2}$	$v(x)=-\frac{1}{x}$
$u(x)=\ln x$	$u'(x)=\frac{1}{x}$
$v'(x)=\frac{2}{x^2}$	$v(x)=-\frac{2}{x}$

$$\underset{IPP}{=}-\frac{\ln^2 x}{x}+\int\frac{2}{x^2}\ln x\,dx$$

$$\underset{IPP}{=}-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}+\int\frac{2}{x^2}dx$$

$$=-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}+c\quad(c\in\mathbb{R})$$

$$V=\pi\cdot\left[\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{\ln^2 x}{x}+\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}\right]_1^e$$

$$=\pi\cdot\left[\frac{1}{3}(e-1)^3+\frac{1}{e}+\frac{2}{e}+\frac{2}{e}-2\right]$$

$$=\frac{\pi(e-1)^3}{3}+\frac{5\pi}{e}-2\pi\quad\left(=\frac{\pi\cdot(e^4-3e^3+3e^2-7e+15)}{3e}\right)$$

$\approx 4{,}808$ *u.v.*

VI 1) $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$ $\qquad \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$= \int \frac{(1+\tan^2\frac{x}{2})^3}{8\tan^3\frac{x}{2}}dx$ $\qquad$ Posons : $t = \tan\frac{x}{2}$, alors $dt = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx \Leftrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$= \int \frac{(1+t^2)^3}{8t^3}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$

$= \int \frac{(1+t^2)^2}{4t^3}dt$

$= \int \frac{1+2t^2+t^4}{4t^3}dt$

$= \int \left(\frac{1}{4}t^{-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{4}t\right)dt$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{4}\cdot\frac{t^2}{2}+c \quad (c\in\mathbb{R})$

$= -\frac{1}{8\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+c$

$= -\frac{1}{8\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln(\tan\frac{x}{2})+\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+c$ $\quad$ car $x\in\,]0\,;\pi[\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ \Rightarrow\ \tan\frac{x}{2}>0$

2) $F(x) = \int \frac{1}{\cos^4 x}dx$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\qquad f(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \quad f'(x)=\frac{-2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

$\underset{IPP}{=} \frac{\tan x}{\cos^2 x}-2\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$ $\qquad g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \quad g(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$= \frac{\tan x}{\cos^2 x}-2\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}dx$

$= \frac{\tan x}{\cos^2 x}-2\int\frac{1}{\cos^4 x}dx+2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$

$= \frac{\tan x}{\cos^2 x}-2\underbrace{\int\frac{1}{\cos^4 x}dx}_{F(x)}+2\tan x$

Donc : $3F(x)=\left(\frac{\tan x}{\cos^2 x}+2\tan x\right)+k \quad (k\in\mathbb{R})$

$$F(x)=\frac{\tan x}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\right)+c=\frac{\tan x}{3}\left(1+\tan^2 x+2\right)+c=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+c \quad (c\in\mathbb{R})$$

Autre méthode : $F(x)=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^4 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\tan^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+c$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}+1+c=0 \Leftrightarrow c=-\frac{4}{3}$

$F(x)=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x-\frac{4}{3}$