Corrigé modèle

Question 1 (2+5+5+3+3=18 points)

Soit $f_m(x)=\ln\frac{2x}{|x^2-m|}$ $(m\in\mathbb{R})$ et soit C_{f_m} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A : $\boxed{m\neq 0}$

1) Déterminez, en fonction de *m*, le domaine de définition de f_m .

C.E. : $\frac{2x}{|x^2-m|}>0\Leftrightarrow x>0$ et $|x^2-m|\neq 0$

Si $\underline{m>0}$, $|x^2-m|\neq 0\Leftrightarrow x\neq-\sqrt{m}$ et $x\neq\sqrt{m}$, alors $Domf_m=\left]0;\sqrt{m}\right[\cup\left]\sqrt{m};+\infty\right[$

Si $\underline{m<0}$, $\underbrace{|x^2-m|\neq 0}_{\text{cond. toujours verifiée}}$, alors $Domf_m=\left]0;+\infty\right[$

2) Déterminez, s'il y en a, les aymptotes et les branches paraboliques de C_{f_m} .

$\boxed{\forall m\in\mathbb{R}_0}$:

$$\lim_{x\to 0^+}f_m(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln\frac{\overbrace{2x}^{\to 0^+}}{\underbrace{|x^2-m|}_{\to|m|}}=-\infty$$ A.V. : $x=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f_m(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x}{x^2-m}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_m(x)}{x}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to+\infty}f_m'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$ B.P. dans la direction (Ox)

Calcul à part : $$f_m'(x)=\frac{\frac{2(x^2-m)-2x\cdot 2x}{(x^2-m)^2}}{\frac{2x}{(x^2-m)}}=\frac{-2(x^2+m)}{(x^2-m)^2}\cdot\frac{(x^2-m)}{2x}=\frac{-(x^2+m)}{x(x^2-m)}$$

$\boxed{\forall m\in\mathbb{R}_0^+}$

$$\lim_{x\to\sqrt{m}}f_m(x)=\lim_{x\to\sqrt{m}}\ln\frac{\overbrace{2x}^{\to 2\sqrt{m}}}{\underbrace{|x^2-m|}_{\to 0^+}}=+\infty$$ A.V. : $x=\sqrt{m}$

3) Discutez, en fonction de *m*, les variations de f_m.

$\boxed{\forall m \in \mathbb{R}_0}$

$$f_m'(x)=\frac{\dfrac{2(x^2-m)-2x\cdot 2x}{(x^2-m)^2}}{\dfrac{2x}{(x^2-m)}}=\frac{-2(x^2+m)}{(x^2-m)^2}\cdot\frac{(x^2-m)}{2x}=\frac{-(x^2+m)}{x(x^2-m)}$$

Si $\underline{m>0}$,

$f_m'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2=-m}_{impossible}$

Tableau de variations :

x	0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f_m'(x)$	//	$+$	//	$-$	
$f_m(x)$	// $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ // $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Si $\underline{m<0}$,

$f_m'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x=-\sqrt{-m}}_{\notin D_{f_m}}$ ou $x=\sqrt{-m}$

Tableau de variations :

x	0		$\sqrt{-m}$		$+\infty$
$f_m'(x)$	//	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	// $-\infty$	$\nearrow$	MAX $-\frac{1}{2}\ln(-m)$	$\searrow$	$-\infty$

Partie B : $\boxed{m=0}$

4) $f_0(x)=\ln\dfrac{2x}{|x^2|}=\ln\dfrac{2}{x}$; $Domf_0=Domf_0'=Domf_0''=\left]0;+\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_0(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\dfrac{2}{x}=+\infty$ A.V. : $x=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\dfrac{2}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f_0(x)}{x}\overset{(H)}{=}\lim\limits_{x\to +\infty} f_0'(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$ B.P. dans la direction (Ox) .

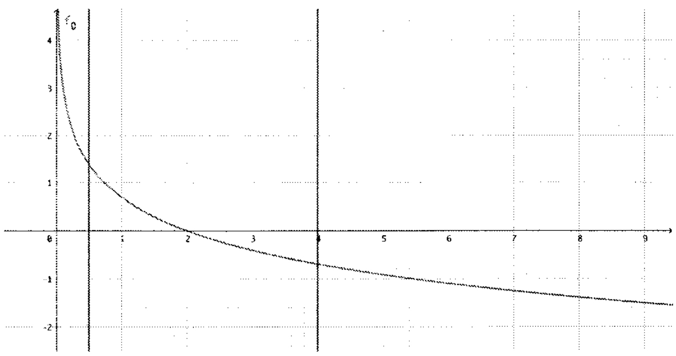
$$f_0'(x)=\frac{-2}{x^2}\frac{x}{2}=-\frac{1}{x}<0$$

Tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f_0'(x)$	//	$-$	
$f_0(x)$	// $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$f_0''(x)=\frac{1}{x^2}>0$, donc C_f tourne sa concavité vers le haut $\forall x\in Domf_0$.

5) $f_0(x)=0 \Leftrightarrow \ln\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}=1 \Leftrightarrow x=2$



$C_f \cap (Ox)=\{I_1(2;0)\}$

Les primitives de $f_0(x)$ sont :

$$F_0(x)=\int \ln\frac{2}{x}dx = x\cdot\ln\frac{2}{x}-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot x\,dx$$

IPP : $u(x)=\ln\frac{2}{x}$ $\qquad v'(x)=1$

$u'(x)=-\frac{1}{x}$ $\qquad v(x)=x$

d'où : $F_0(x)=x\ln\frac{2}{x}+x+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

Aire : $A=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f_0(x)dx-\int_{2}^{4} f_0(x)dx=\left(F_0(2)-F_0\left(\frac{1}{2}\right)\right)-\left(F_0(4)-F_0(2)\right)$

$=2F_0(2)-F_0(4)-F_0\left(\frac{1}{2}\right)$

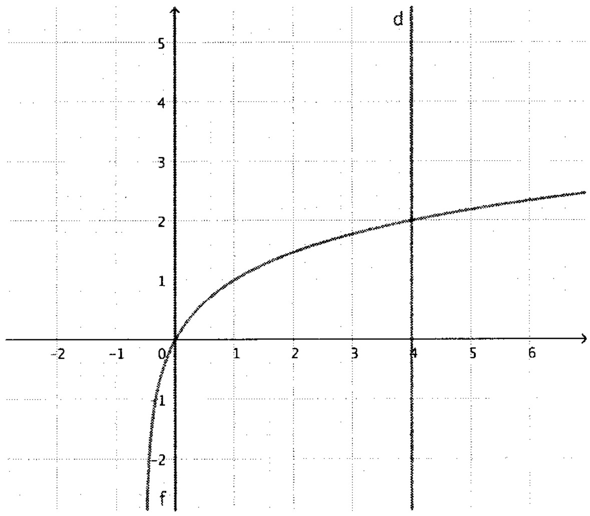
$=2\cdot 2-4+4\ln 2-\ln 2-\frac{1}{2}$

$=3\ln 2-\frac{1}{2}$ u.a.

Question 2 **(5+(2,5+2,5) =10 points)**

1) Volume d'un solide

$f(x)=\log_3(2x+1)$; $D_f = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$



$\forall x \in D_f$: $\quad y=\log_3(2x+1)$

$\Leftrightarrow 2x+1=3^y$

$\Leftrightarrow x=\frac{3^y}{2}-\frac{1}{2}$

Posons $f^{-1}(y)=\frac{3^y}{2}-\frac{1}{2}$

$f^{-1}(y)=4 \Leftrightarrow 3^y=9 \Leftrightarrow y=2$.

C_f coupe la droite d en $(4;2)$.

Volume du solide :

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^2\left(4^2-\left(f^{-1}(y)\right)^2\right)dy \\
&= \pi\int_0^2\left(4^2-\left(\frac{3^y}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\right)dy \\
&= \pi\int_0^2\left(16-\frac{1}{4}3^{2y}+\frac{1}{2}3^y-\frac{1}{4}\right)dy \\
&= \pi\left[\frac{63}{4}y-\frac{1}{8\ln 3}3^{2y}+\frac{1}{2\ln 3}3^y\right]_0^2 \\
&= \pi\left(\frac{63}{2}-\frac{1}{8\ln 3}3^4+\frac{1}{2\ln 3}3^2\right)-\pi\left(-\frac{1}{8\ln 3}+\frac{1}{2\ln 3}\right) \\
&= \pi\left(\frac{63}{2}-\frac{10}{\ln 3}+\frac{4}{\ln 3}\right) \\
&= \pi\left(\frac{63}{2}-\frac{6}{\ln 3}\right) \\
&\simeq 81{,}80 \text{ u.V.}
\end{aligned}$$

2) Calculez:

a) $$\int_{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}^{0} \frac{4-3x}{\sqrt{81-x^2}}\,dx = \int_{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}^{0} \frac{4}{\sqrt{81-x^2}}\,dx - \int_{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}^{0} \frac{3x}{\sqrt{81-x^2}}\,dx$$

$$I_1 = \int_{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}^{0} \frac{4}{\sqrt{81-x^2}}\,dx = \frac{4}{9}\cdot 9 \int_{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}^{0} \frac{\frac{1}{9}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{9}\right)^2}}\,dx = 4\left[\text{Arcsin}\left(\frac{x}{9}\right)\right]_{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}^{0} = \frac{4\pi}{3}$$

$$I_2 = -\int_{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}^{0} \frac{3x}{\sqrt{81-x^2}}\,dx = -3\frac{1}{-2}\int_{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}^{0} -2x\left(81-x^2\right)^{\frac{-1}{2}}\,dx = 3\left[\sqrt{81-x^2}\right]_{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}^{0} = 27-\frac{27}{2} = \frac{27}{2}$$

donc $$\int_{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}^{0} \frac{4-3x}{\sqrt{81-x^2}}\,dx = \frac{4\pi}{3}+\frac{27}{2}$$

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-\cos x}\,dx$ posons : $t=\tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\text{Arctan}(t)$ et $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-\cos x}\,dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{2}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = 4\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1+t^2}{1+t^2-1+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{1}{t^2}\,dt = 2\left[\frac{-1}{t}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}$$

donc $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-\cos x}\,dx = 2\sqrt{3}-2$$

Question 3 **(1+1,5+3+(3,5+3,5+3,5+2)=18 points)**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x+\ln\dfrac{2x+1}{x+1} & \text{si } x \le 0 \\ 3^{-\frac{1}{2x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Déterminez le domaine de définition de la fonction f.

Si $x \le 0$, alors C.E. : $\dfrac{2x+1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\left]-\infty;-1\right[\cup \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[\right) \cap \left]-\infty;0\right]$

Si $x > 0$, alors C.E. : $x \neq 0$

donc, $Domf = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) Etudiez la continuité de la fonction f en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x+\ln\frac{2x+1}{x+1}\right)=0+\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 3^{-\frac{1}{2x}}=0$$

$$f(0)=0$$

donc f est continue en $x=0$.

3) Etudiez la dérivabilité de la fonction f en $x=0$. Interprétez géométriquement votre résultat !

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+3x+2}{(2x+1)(x+1)}=2$$

Calcul à part : $f'(x)=1+\frac{x+1}{2x+1}\cdot\frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2}=1+\frac{1}{(2x+1)(x+1)}=\frac{2x^2+3x+2}{(2x+1)(x+1)}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{3^{\frac{1}{2x}}}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{\ln 3}{2x^2}3^{\frac{1}{2x}}}=\frac{2}{\ln 3}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2x}}}\right)=0$$

donc f n'est pas dérivable en $x=0$.

C_f admet deux demi-tangentes en $x=0$ de pente 2 (à gauche en $x=0$) et de pente 0 (à droite en $x=0$). (point anguleux $O(0;0)$)

4) Etude de la fonction f:

a) $$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(x+\ln\underbrace{\frac{2x}{x}}_{\to\ln 2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(x+\ln\underbrace{\frac{2x+1}{x+1}}_{\to+\infty}\right)=+\infty$$ A.V. : $x=-1$

$$\lim_{x\to -\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=\lim_{x\to -\left(\frac{1}{2}\right)^+}\left(x+\ln\underbrace{\frac{2x+1}{x+1}}_{\to-\infty}\right)=-\infty$$ A.V. : $x=-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(3^{-\frac{1}{2x}}\right)=1$$ A.H. : $y=1$ $(\text{si } x\to+\infty)$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{\ln 2}{x}\right)=1 \;;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\frac{2x+1}{x+1}\right)=\ln 2 \qquad \text{A.O. : } y=x+\ln 2 \quad (\text{si } x\to-\infty)$$

b) $Domf' = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-\frac{1}{2};0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$

Si $x\in\left(\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-\frac{1}{2};0\right[\right)$,

$$f'(x)=1+\frac{x+1}{2x+1}\cdot\frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2}=1+\frac{1}{(2x+1)(x+1)}=\frac{2x^2+3x+2}{(2x+1)(x+1)}>0$$

Si $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f'(x)=\frac{\ln 3}{2x^2}\cdot 3^{-\frac{1}{2x}}>0$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	//	//	//	$+$	//	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ //	//	//	$-\infty$ ↗	0	↗	1

c) $Domf'' = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-\frac{1}{2};0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$

Si $x\in\left(\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-\frac{1}{2};0\right[\right)$,

$$f''(x)=\frac{(4x+3)(2x^2+3x+1)-(2x^2+3x+2)(4x+3)}{(2x+1)^2(x+1)^2}=\frac{-(4x+3)}{(2x+1)^2(x+1)^2}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x=-\frac{3}{4}}_{\notin\left(\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-\frac{1}{2};0\right[\right)}$$

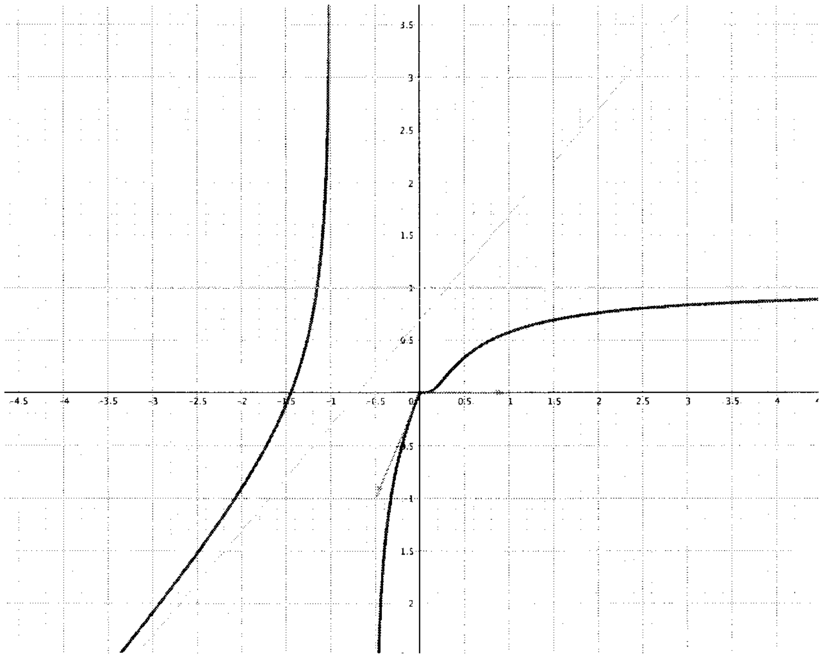
Si $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f''(x)=\frac{\ln 3}{2}\cdot 3^{-\frac{1}{2x}}\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{\ln 3}{2x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\ln 3}{4}\cdot 3^{-\frac{1}{2x}}\cdot\frac{\ln 3-4x}{x^4}$

Tableau de concavité :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{\ln 3}{4}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	//	//	//	$-$	//	$+$	0	$-$	
C_f		↑	//	//	//	↓		↑	P.I.	↓	

Point d'inflexion : $I\left(\frac{\ln 3}{4};3^{-\frac{2}{\ln 3}}\right)=I\left(\frac{\ln 3}{4};e^{-2}\right)$

d)



Question 4 (6+(4+4)=14 points)

1) $f(x)=\dfrac{2x^3+16x-16}{x^4-16}$ $\qquad D=\left]2;+\infty\right[$

$\forall x\in D$: $\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{cx+d}{x^2+4}=\dfrac{2x^3+16x-16}{x^4-16}$

$\Leftrightarrow a(x-2)(x^2+4)+b(x+2)(x^2+4)+(x^2-4)(cx+d)=2x^3+16x-16 \quad (E)$

L'égalité des polynômes étant vérifiée pour tout réel, on a

Si $x=2$, alors $(E)\Leftrightarrow 32b=16+32-16 \Leftrightarrow \underline{b=1}$

Si $x=-2$, alors $(E)\Leftrightarrow -32a=-16-32-16 \Leftrightarrow \underline{a=2}$

Si $x=0$, alors $(E)\Leftrightarrow -16+8-4d=-16 \Leftrightarrow \underline{d=2}$

Si $x=1$, alors $(E)\Leftrightarrow -10+15-3c-6=2 \Leftrightarrow \underline{c=-1}$

Par conséquent $f(x)=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{-x+2}{x^2+4}$

Les primitives de f sont :

$$F(x)=\int\left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\frac{-x}{x^2+4}+\frac{2}{x^2+4}\right)dx$$

$$=2\ln\underbrace{(x+2)}_{x\in]2;+\infty[}+\ln\underbrace{(x-2)}_{x\in]2;+\infty[}-\int\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)dx$$

$$F(x) = 2\ln\underbrace{(x+2)}_{x\in]2;+\infty[} + \ln\underbrace{(x-2)}_{x\in]2;+\infty[} - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + c \text{ , avec } c\in\mathbb{R}$$

La primitive F de f sur $]2;+\infty[$ qui prend la valeur $2\ln 5$ en 3 :

$$F(3) = 2\ln 5 \iff 2\ln 5 + \ln 1 - \frac{1}{2}\ln 13 + \text{Arctan}\left(\frac{3}{2}\right) + c = 2\ln 5$$

$$\iff c = \frac{1}{2}\ln 13 - \text{Arctan}\left(\frac{3}{2}\right)$$

d'où : $F(x) = 2\ln(x+2) + \ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\ln 13}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{3}{2}\right)$

2) Résolvez les (in)équations suivantes:

a) $2 + \log_x 2 - \frac{1}{2}\log_x 81 = \log_{x-2}(x-1)\log_x(x-2) - \log_x(4x-11) \quad (E)$

Conditions d'existence :

$x>0$ et $x\neq 1$ et $x>2$ et $x\neq 3$ et $x>1$ et $x>\frac{11}{4}$

$D_E = \left]\frac{11}{4};3\right[\cup]3;+\infty[$

$$\forall x\in D_E : (E) \iff 2 + \frac{\ln 2}{\ln x} - \frac{\ln 9}{\ln x} = \frac{\ln(x-1)}{\ln(x-2)}\cdot\frac{\ln(x-2)}{\ln x} - \frac{\ln(4x-11)}{\ln x} \quad /\cdot \ln x \neq 0$$

$$\iff 2\ln x + \ln 2 - \ln 9 = \ln(x-1) - \ln(4x-11)$$

$$\iff \ln x^2 + \ln 2 + \ln(4x-11) = \ln(x-1) + \ln 9$$

$$\iff \ln\left(2x^2(4x-11)\right) = \ln(9x-9)$$

$$\iff 8x^3 - 22x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$\iff (x-3)(8x^2+2x-3) = 0$$

$$\iff x = 3 \notin D_E \text{ ou } x = \frac{1}{2} \notin D_E \text{ ou } x = -\frac{3}{4} \notin D_E$$

$S = \{\ \}$

b) $5\sqrt{5^{-x}}\cdot\left(2+5^{\frac{x}{2}+1}\right) \leq 3\sqrt{5^{x+2}} \quad (I) \qquad D_I = \mathbb{R}$

$$\forall x\in D_I : (I) \iff 5^{1-\frac{x}{2}}\cdot\left(2+5^{\frac{x}{2}+1}\right) \leq 3\cdot 5^{\frac{x}{2}+1}$$

$$\iff 10\cdot 5^{-\frac{x}{2}} + 5^{1-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1} \leq 15\cdot 5^{\frac{x}{2}} \quad /\cdot 5^{\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 10+25\cdot 5^{\frac{x}{2}}-15\cdot\left(5^{\frac{x}{2}}\right)^2\leq 0 \qquad \text{posons : } y=5^{\frac{x}{2}}>0$$

$$\Leftrightarrow -3y^2+5y+2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y\leq -\frac{1}{3}}_{\text{impossible}} \quad \text{ou} \quad y\geq 2$$

$$\Leftrightarrow 5^{\frac{x}{2}}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow x\geq 2\log_5 2$$

$$S=\left[\frac{2\ln 2}{\ln 5};+\infty\right[$$