LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES 2018

Corrigé

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
MATHÉMATIQUES II	B	*Durée de l'épreuve :*	*4 heures*
		Date de l'épreuve :	*29 mai 2018*

Question 1

$f_m(x) = x + \ln\dfrac{m-x}{m+x} \qquad (m \in \mathbb{R}_0^+)$

a) CE : $\dfrac{m-x}{m+x} > 0 \Leftrightarrow x \in\,]-m\,;m[$

x	$-\infty$		$-m$		m		$+\infty$
$\dfrac{m-x}{m+x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

(1 pt)

$\operatorname{dom} f_m = \operatorname{dom}_c f_m = \,]-m\,;m[$

b) $\forall x \in \operatorname{dom} f$:

- $-x \in \operatorname{dom} f$
- $f(-x) = -x + \ln\dfrac{m+x}{m-x}$
  $= -x - \ln\dfrac{m-x}{m+x}$
  $= -f_m(x)$

Donc f_m est impaire.

$\lim\limits_{x\to(-m)^+} f_m(x)$

$$= \lim_{x\to(-m)^+}\left(\underbrace{x}_{\to -m} + \underbrace{\ln \overbrace{\frac{\overbrace{m-x}^{\to 2m}}{\underbrace{m+x}_{\to 0^+}}}^{\to+\infty}}_{\to+\infty}\right)$$

$= +\infty$

C_{f_m} admet une A.V. $v_1 \equiv x = -m$

Par symétrie, on a :

$\lim\limits_{x\to m^-} f_m(x) = -\infty$

C_{f_m} admet une A.V. $v_2 \equiv x = m$ **(3 pts)**

c) $\operatorname{dom} f'_m = \operatorname{dom} f_m$

$f_m(x) = x + \ln|m-x| - \ln|m+x|$

$\forall x \in \operatorname{dom} f'_m$: **(2 pts)**

$f'_m(x)$

$= 1 + \dfrac{-1}{m-x} - \dfrac{1}{m+x}$

$= \dfrac{(m+x)(m-x) - (m+x) - (m-x)}{(m+x)(m-x)}$

$= \dfrac{m^2 - x^2 - m - x - m + x}{(m+x)(m-x)}$

$= \dfrac{-x^2 + m^2 - 2m}{\underbrace{(m+x)(m-x)}_{>0}}$

- $(\Delta = 4(m^2 - 2m))$

m	0		2		$+\infty$
Δ	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On distingue 3 cas pour le tableau de variation de f_m :

1^er^ cas : $m \in\,]0\,;2[$ **(1 pt)**

$\Delta < 0$

x	$-m$		m
$f'_m(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$
$f_m(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

2^e^ cas : $m = 2$ **(1 pt)**

$\Delta = 0$; $x_0 = -\dfrac{0}{-2} = 0 \in\,]-m\,;m[$

x	$-m$		0		m
$f'_m(x)$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$
$f_m(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0 TH	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

$f(0) = 0 + 0 = 0$

3^e^ cas : $m > 2$ **(3 pts)**

$\Delta > 0$

$x_1 = \dfrac{-0 - 2\sqrt{m^2-2m}}{-2} = \sqrt{m^2 - 2m}$

$x_2 = \dfrac{-0 + 2\sqrt{m^2-2m}}{-2} = -\sqrt{m^2 - 2m}$

On a :

$x_1 = |m|\sqrt{1 - \dfrac{2}{m}} = m\underbrace{\sqrt{1 - \dfrac{2}{m}}}_{<1} < m$

Donc : $x_1 \in\,]0\,;m[$

Comme $x_2 = -x_1$, on a que $x_2 \in\,]-m\,;0[$

Par conséquent on a que $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f'_m$

x	$-m$		$-\sqrt{m^2-2m}$		$\sqrt{m^2-2m}$		m
$f_m'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f_m(x)$	$\|\| +\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty \|\|$

d) $\text{dom}\, f_m'' = \text{dom}\, f_m'$

$\forall x \in \text{dom}\, f_m''$: **(1,5 pt)**

$$f_m''(x)$$
$$= \left(\frac{-x^2+m^2-2m}{m^2-x^2}\right)'$$
$$= \frac{-2x(m^2-x^2)-(-x^2+m^2-2m)(-2x)}{(m^2-x^2)^2}$$
$$= \frac{-2x(\cancel{m^2}-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}-\cancel{m^2}+2m)}{(m+x)^2(m-x)^2}$$
$$= \frac{-4mx}{\underbrace{(m+x)^2(m-x)^2}_{>0}}$$

Tableau de concavité de f_m : **(1,5 pt)**

x	$-m$		0		m
$f_m''(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
concavité de f_m	$\|\|$	haut	P.I.	bas	$\|\|$

$f(0) = 0 + 0 = 0$

Point d'inflexion : $I_m(0\,;0)$

e) Équation de la tangente t_m au point d'inflexion I_m : **(1 pt)**

$$y = f_m(0) + f_m'(0)(x-0)$$
$$\Leftrightarrow y = 0 + \frac{m^2-2m}{m^2}x$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{m-2}{m}x$$

On a :

$A(-1\,;2) \in t_m$ **(1 pt)**

$$\Leftrightarrow \quad 2 = \frac{m-2}{m}\cdot(-1) \quad \Big| \cdot \underbrace{m}_{>0}$$
$$\Leftrightarrow 2m = -m + 2$$
$$\Leftrightarrow 3m = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{2}{3}$$

f) $$J_m = \int_0^{\frac{m}{2}} f_m(x)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{m}{2}} \left(x + \ln\frac{m-x}{m+x}\right)dx$$

Calcul à part : **(2,5 pts)**

$$\int \ln\frac{m-x}{m+x}\cdot 1\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \ln\dfrac{m-x}{m+x} & v'(x) = 1 \\ u'(x) = \dfrac{-1}{m-x} - \dfrac{1}{m+x} & v(x) = x+m \\ \quad = \dfrac{-2m}{(m+x)(m-x)} & \end{array}}$$

$$\underset{\text{ipp}}{=} (x+m)\ln\frac{m-x}{m+x}$$
$$+ 2m\int \frac{\cancel{x+m}}{\cancel{(x+m)}(m-x)}dx$$
$$= (x+m)\ln\frac{m-x}{m+x} - 2m\int\frac{-1}{m-x}dx$$
$$= (x+m)\ln\frac{m-x}{m+x} - 2m\ln\left|\underbrace{m-x}_{>0}\right| + k$$

$(k \in \mathbb{R})$

$$= (x+m)\ln\frac{m-x}{m+x} - 2m\ln(m-x) + k$$
$$= (x+m)(\ln|m-x| - \ln|m+x|)$$
$$- 2m\ln(m-x) + k$$
$$= (x+m)\ln(m-x) - (x+m)\ln(m+x)$$
$$- 2m\ln(m-x) + k$$
$$= (x-m)\ln(m-x) - (x+m)\ln(m+x) + k$$

Autre méthode :

$$\int \ln\frac{m-x}{m+x}\cdot 1\,dx$$

$$\left[\begin{array}{ll} u(x) = \ln\dfrac{m-x}{m+x} & v'(x) = 1 \\ u'(x) = \dfrac{-2m}{(m+x)(m-x)} & v(x) = x \end{array}\right]$$

$$\underset{\text{ipp}}{=} x\ln\frac{m-x}{m+x} + m\int\frac{2x}{(m+x)(m-x)}dx$$

On a : $\dfrac{2x}{(m+x)(m-x)} = \dfrac{a}{m+x} + \dfrac{b}{m-x}$

$$\Leftrightarrow 2x = a(m-x) + b(m+x)$$
$$\Leftrightarrow 2x = (-a+b)x + (a+b)m$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b = 2 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

D'où :

$$\int \ln\frac{m-x}{m+x}\,dx$$
$$= x\ln\frac{m-x}{m+x} + m\int\left(\frac{-1}{m+x} + \frac{1}{m-x}\right)dx$$
$$= x\ln(m-x) - x\ln(m+x) - m\ln(m+x)$$
$$- m\ln(m-x) + k \quad (k \in \mathbb{R})$$
$$= (x-m)\ln(m-x) - (x+m)\ln(m+x) + k$$

On obtient :

J_m **(2,5 pts)**

$$= \int_0^{\frac{m}{2}} \left(x + \ln\frac{m-x}{m+x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + (x-m)\ln(m-x) - (x+m)\ln(m+x)\right]_0^{\frac{m}{2}}$$

$$= \left(\frac{m^2}{8} - \frac{m}{2}\ln\frac{m}{2} - \frac{3m}{2}\ln\frac{3m}{2}\right) -(0 - m\ln m - m\ln m)$$

$$= \frac{m^2}{8} - \frac{m}{2}\left(\ln\frac{m}{2} + 3\ln\frac{3m}{2} - 4\ln m\right)$$

$$= \frac{m^2}{8} - \frac{m}{2}(\cancel{\ln m} - \ln 2 + 3\ln 3 \cancel{+ 3\ln m} - 3\ln 2 \cancel{- 4\ln m})$$

$$= \frac{m^2}{8} - \frac{m}{2}(3\ln 3 - 4\ln 2)$$

$$= \frac{m^2}{8} - \frac{m}{2}\ln\frac{27}{16}$$

(1+3+7+3+2+5) 21 points

Question 2

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \left(2 + \frac{2}{e}\right)x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (x-2)e^{\left(\frac{1}{x-2}\right)} & \text{si } x \geq 1 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$$

a) $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

Continuité en 1 : **(2 pt)**

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[-x^2 + \left(2+\frac{2}{e}\right)x - 1 - \frac{3}{e}\right] = -\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{e} = f(1)$

f est donc continue en 1.

$\mathrm{dom}_c f = \mathrm{dom}\, f$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \underbrace{(x-2)}_{\to 0^+}\underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x-2}}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty}$ (F.I. : $0\cdot\infty$)

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{\frac{1}{x-2}} \quad \left(\text{F.I.} : \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}\left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right]}{-\frac{1}{(x-2)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$= +\infty$$

C_f admet une A.V. $v \equiv x = 2$. **(1,5 pt)**

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\underbrace{(x-2)}_{\to 0^-}\underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x-2}}^{\to-\infty}}}_{\to 0^+} = 0$$

C_f admet $P(2\,;0)$ comme point-limite. **(0,5 pt)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{(x-2)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x-2}}^{\to 0}}}_{\to 1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x-2}{x}}_{\to 1}\underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x-2}}^{\to 0}}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} - (x-2) - 2\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{(x-2)\left(e^{\frac{1}{x-2}} - 1\right)}_{\to 1} - 2\right]$$

$$= -1$$

Calcul à part :

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{(x-2)}_{\to+\infty}\underbrace{\left(e^{\frac{1}{x-2}} - 1\right)}_{\to 0} \quad (\text{F.I.} : \infty\cdot 0)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x-2}} \quad \left(\text{F.I.} : \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}\left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right]}{-\frac{1}{(x-2)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$= 1$$

Autre méthode :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1 - \frac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x-2}} - 1\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad \left(\text{F.I.} : \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x-2}} + \frac{x-2}{x}e^{\frac{1}{x-2}}\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-2}}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x(x-2)}\right)(-x^2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x-2}}}_{\to 1}\underbrace{\left(-2+\overbrace{\frac{x}{x-2}}^{\to 1}\right)}_{\to -1}$$

$$= -1$$

Donc : **(3 pts)**

C_f admet une A.O. $d \equiv y = x-1$ en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[-x^2+\left(2+\frac{2}{e}\right)x-1-\frac{3}{e}\right]$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-x+2+\frac{2}{e}-\frac{1}{x}-\frac{3}{ex}\right)$$
$$= +\infty$$

C_f admet une B.P. dans la direction de (Oy) en $-\infty$. **(1 pt)**

c) $\forall x < 1$:

$$f'(x) = -2x+2+\frac{2}{e}$$

$\forall x \in]1\,;+\infty[\setminus\{2\}$: **(1,5 pt)**

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} + (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}\left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right]$$
$$= \left(1-\frac{1}{(x-2)}\right)e^{\frac{1}{x-2}}$$
$$= \frac{x-3}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}$$

<u>Dérivabilité en 1 :</u> **(2 pts)**

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad \left(\text{F.I.} : \frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to1^-} f'(x)$$
$$= \lim_{x\to1^-}\left(-2x+2+\frac{2}{e}\right)$$
$$= \frac{2}{e} = f'_g(1)$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad \left(\text{F.I.} : \frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to1^+} f'(x)$$
$$= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-3}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}\right)$$
$$= \frac{2}{e} = f'_d(1)$$

Comme $f'_g(1) = f'_d(1)$, f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{2}{e}$.

On a : $\text{dom}_d f = \text{dom} f' = \text{dom} f$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+2+\dfrac{2}{e} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{x-3}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}} & \text{si } x \geq 1 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$$

$\forall x < 1 : f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1+\frac{1}{e}$ (à écarter)

Tableau de variation : **(1,5 pt)**

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	e min	↗	$+\infty$

$f(3) = e$

d) Soit t la tangente au point de tangence $T(x_0\,; f(x_0))$ avec $x_0 \in [1\,;+\infty[\setminus\{2\}$

On a :

$t \equiv y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$A(3\,;0) \in t$

$$\Leftrightarrow 0 = (x_0-2)e^{\frac{1}{x_0-2}} + \frac{x_0-3}{x_0-2}e^{\frac{1}{x_0-2}}(3-x_0)$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par $(x_0-2)e^{-\frac{1}{x_0-2}} \neq 0$, on obtient : **(2 pt)**

$$0 = (x_0-2)^2-(x_0-3)^2$$
$$\Leftrightarrow 0 = (x_0-2+x_0-3)(x_0-2-x_0+3)$$
$$\Leftrightarrow 0 = 2x_0-5$$
$$\Leftrightarrow \underline{x_0 = \frac{5}{2}} \in [1\,;+\infty[\setminus\{2\}$$

<u>Conclusion :</u>

$C_f$admet une seule tangente qui passe par le point $A(3\,;0)$.

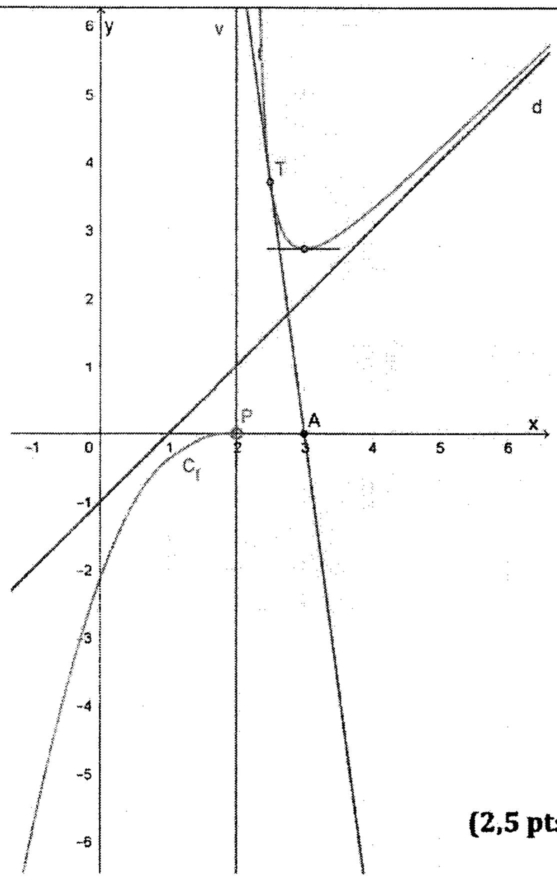
Équation de cette tangente : **(0,5 pt)**

$$y = f\left(\frac{5}{2}\right)+f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}e^2 - e^2\left(x-\frac{5}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \underline{y = -e^2x+3e^2}$$

e) Tableau de valeurs :

x	-1	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
$f(x)$	$-5{,}84$	$-2{,}10$	$-0{,}99$	$-0{,}37$	$-0{,}07$

x	$2{,}5$	3	4	5	6
$f(x)$	$3{,}69$	$2{,}72$	$3{,}30$	$4{,}19$	$5{,}14$



(2,5 pts)

(2+6+5+2,5+2,5) *18 points*

Question 3

$f(x) = \cos x \; ; \; g(x) = \sin x$

a) $\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Aire de la surface S_1 :

$\mathcal{A}$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - (-1))dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos x - (-1))dx$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)dx$$

$$= [-\cos x + x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + [\sin x + x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$+ [x - \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{2} + 0 + \pi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$+ \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + 0 + \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$= 2\pi - 2\sqrt{2}$ unités d'aire

$\approx 3{,}45$ unités d'aire **(2,5)**

b) Volume cherché :

$\mathcal{V}$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - 0\right)$$

$= \frac{\pi}{2}$ unités de volume

$\approx 1{,}571$ unités de volume **(1,5)**

c) $f^{-1}(y) = \operatorname{Arccos} y \; ; \; g^{-1}(y) = \operatorname{Arcsin} y$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Volume cherché :

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(g^{-1}(y)\right)^2 dy + \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy$$

Calculs à part :

$$\int \left(g^{-1}(y)\right)^2 dy = \int \operatorname{Arcsin}^2 y \; dy$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(y) = \operatorname{Arcsin}^2 y & v'(y) = 1 \\ u'(y) = 2\operatorname{Arcsin} y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & v(y) = y \end{array}}$$

$$= y \operatorname{Arcsin}^2 y + 2\int \operatorname{Arcsin} y \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} \, dy$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(y) = \operatorname{Arcsin} y & v'(y) = \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} \\ u'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & v(y) = \sqrt{1-y^2} \end{array}}$$

$$= y \operatorname{Arcsin}^2 y + 2\sqrt{1-y^2} \operatorname{Arcsin} y - 2\int dy$$

$$= y \operatorname{Arcsin}^2 y + 2\sqrt{1-y^2} \operatorname{Arcsin} y - 2y$$

$+k \;\; (k \in \mathbb{R})$ **(2 pt)**

$$\int \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy = \int \operatorname{Arccos}^2 y \; dy$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(y) = \operatorname{Arccos}^2 y & v'(y) = 1 \\ u'(y) = 2\operatorname{Arccos} y \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} & v(y) = y \end{array}}$$

$$= y \operatorname{Arccos}^2 y - 2\int \operatorname{Arccos} y \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} \, dy$$

$u(y) = \operatorname{Arccos} y$	$v'(x) = \dfrac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}}$
$u'(y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$	$v(x) = \sqrt{1-y^2}$

$= y \operatorname{Arccos}^2 y - 2\sqrt{1-y^2} \operatorname{Arccos} y - 2\int dy$

$= y \operatorname{Arccos}^2 y - 2\sqrt{1-y^2} \operatorname{Arccos} y - 2y$

$+k \ (k \in \mathbb{R})$ **(2 pts)**

D'où :

$\mathcal{V}$

$= \pi\left[y \operatorname{Arcsin}^2 y + 2\sqrt{1-y^2} \operatorname{Arcsin} y - 2y\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$+\pi\left[y \operatorname{Arccos}^2 y - 2\sqrt{1-y^2} \operatorname{Arccos} y - 2y\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}$

$= \pi\left(\frac{\sqrt{2}\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \sqrt{2} - 0 - 0 + 0\right)$

$+\pi\left(0 - 0 - 2 - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \sqrt{2}\right)$

$= \pi\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2} - 2\right)$ unités de volume

$\approx 0{,}696$ unités de volume **(2 pt)**

(2,5+1,5+6) 10 points

Question 4

a)

$\log_{15}(\log_{0,2} x) \leq 1 - \log_{15}(-1 + \log_{0,2} x^2)$

CE : **(2 pts)**

1) $x > 0$
2) $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
3) $\log_{0,2} x > 0 \Leftrightarrow \log_{0,2} x > \log_{0,2} 1 \Leftrightarrow x < 1$
4) $-1 + \log_{0,2} x^2 > 0$

$\Leftrightarrow 2\log_{0,2} x > 1$; car $x > 0$ (voir CE 1))

$\Leftrightarrow \quad \log_{0,2} x > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \log_{0,2} x > \log_{0,2} 0{,}2^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \quad x < \sqrt{0{,}2}$; car $\log_{0,2}$ est une bij. str. ↘

$\Leftrightarrow \quad x < \frac{\sqrt{5}}{5}$

Domaine d'existence : $D = \left]0 ; \frac{\sqrt{5}}{5}\right[$

$\forall x \in D$:

$\log_{15}(\log_{0,2} x) \leq 1 - \log_{15}(-1 + \log_{0,2} x^2)$

$\Leftrightarrow \log_{15}(\log_{0,2} x) + \log_{15}(-1 + 2\log_{0,2} x) \leq 1$

$\Leftrightarrow \log_{15}[\log_{0,2} x\,(-1 + 2\log_{0,2} x)] \leq \log_{15} 15$

$\Leftrightarrow \log_{0,2} x\,(-1 + 2\log_{0,2} x) \leq 15$

(car $\log_{15}$ est une bijection str. croissante)

$\Leftrightarrow 2\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 15 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 - t - 15 \leq 0$ (en posant $t = \log_{0,2} x$)

$\left(\begin{array}{c} \Delta = 1 + 120 = 121 > 0 \\ t_1 = \frac{1-11}{4} = -\frac{5}{2} \quad ; \quad t_2 = \frac{1+11}{4} = 3 \end{array}\right)$ **(2,5 pts)**

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$2t^2 - t - 15$		+	0	−	0	+	

On a :

$2t^2 - t - 15 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} \leq \quad t \quad \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} \leq \log_{0,2} x \leq 3$ (en revenant à x)

$\Leftrightarrow \log_{0,2} 0{,}2^{-\frac{5}{2}} \leq \log_{0,2} x \leq \log_{0,2} 0{,}2^3$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}2^{-\frac{5}{2}} \geq \quad x \quad \geq 0{,}2^3$

(car $\log_{0,2}$ est une bijection str. décroissante)

$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{5}\right)^3 \leq \quad x \quad \leq 5^{\frac{5}{2}}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{125} \leq \quad x \quad \leq 25\sqrt{5}$

Conclusion : **(1,5 pt)**

$\underline{S} = \left[\frac{1}{125} ; 25\sqrt{5}\right] \cap D = \left[\frac{1}{125} ; \frac{\sqrt{5}}{5}\right[$

b)

$\int \frac{1}{3 + \sin x} dx$

Posons : $t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\operatorname{Arctan} t$

On a alors :

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Leftrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

On obtient alors :

$\int \frac{1}{3 + \sin x} dx$

$= \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$

$= \int \frac{2}{\underbrace{3t^2 + 2t + 3}_{\Delta = 4 - 36 = -32 < 0}} dt$ **(2 pts)**

$= \int \frac{2}{3\left(t^2 + \frac{2}{3}t + 1\right)} dt$

$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{t^2 + 2 \cdot t \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1} dt$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{\frac{8}{9}\left[\frac{9}{8}\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+1\right]}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\int \frac{1}{1+\left[\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{3}\right)\right]^2}\,dt$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\int \underbrace{\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{3t+1}{2\sqrt{2}}\right)^2}}_{\frac{u'}{1+u^2}}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}\frac{3t+1}{2\sqrt{2}}+k \quad (k\in\mathbb{R})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}+k$$ **(3 pts)**

(6+5) 11 points