Solution Question 1 $(3+4+3=10 \text{ points})$

a) C.E. $x>0$

$(\forall x\in D=]0;+\infty[)$

$$2^x\log_2(x)-8\log_2(x)-2^{x+2}=-32$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x)(2^x-8)-4(2^x-8)=0$$

$$\Leftrightarrow (2^x-8)(\log_2(x)-4)=0$$

$$\Leftrightarrow 2^x=8\vee\log_2(x)=4$$

$$\Leftrightarrow x=\underbrace{\boxed{3}}_{\in D}\vee x=\underbrace{\boxed{16}}_{\in D}$$

$$\boxed{S=\{3;16\}}$$

b) C.E. $x^2-2\neq 0\wedge 1-x>0\Leftrightarrow x\neq-\sqrt{2}\wedge x\neq\sqrt{2}\wedge x<1$

$(\forall x\in D=]-\infty;1[\setminus\{-\sqrt{2}\})$: $\ln|x^2-2|-2\ln(1-x)>0\Leftrightarrow \ln|x^2-2|>\ln(x-1)^2$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1
$\lvert x^2-2\rvert$	x^2-2	|	$2-x^2$

$\boxed{1°)\ x\in]-\infty;-\sqrt{2}[}$

$\ln|x^2-2|>\ln(x-1)^2\Leftrightarrow x^2-2>x^2-2x+1\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$

$S_1=\varnothing$

$\boxed{2°)\ x\in]-\sqrt{2};1[}$

$$\ln|x^2-2|>\ln(x-1)^2\Leftrightarrow 2-x^2>x^2-2x+1\Leftrightarrow 2x^2-2x-1<0\Leftrightarrow \underbrace{\boxed{\tfrac{1-\sqrt{3}}{2}}}_{\approx-0,37}<x<\underbrace{\boxed{\tfrac{1+\sqrt{3}}{2}}}_{\approx 1,37}$$

$S_2=]\frac{1-\sqrt{3}}{2};1[$

$$\boxed{S=S_1\cup S_2=]\tfrac{1-\sqrt{3}}{2};1[}$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\underbrace{\boxed{\sqrt{x}}}_{\to+\infty}\underbrace{\boxed{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}}_{\to 0}}$$

Limite de l'exposant

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\boxed{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}}^{\to 0}}{\underbrace{\boxed{x^{\frac{-1}{2}}}}_{\to 0}}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1}{x-1}}{-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^{\frac{3}{2}}}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4\cancel{x^{\frac{3}{2}}}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{x}-x^{\frac{-3}{2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\underbrace{\boxed{\sqrt{x}-x^{\frac{-3}{2}}}}_{\to+\infty}}=0$$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}}=e^0=\boxed{1}$

Solution Question 2 (4 +3+2=9 points)

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{x^2}{x-1}} & si\ x\neq 1 \\ 0 & si\ x=1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\overbrace{\boxed{\frac{x^2}{x-1}}}^{\to-\infty}}=0$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\overbrace{\boxed{\frac{x^2}{x-1}}}^{\to+\infty}}=+\infty.$

La fonction f n'est pas continue en 1 car $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

b) $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\overbrace{\boxed{e^{\frac{x^2}{x-1}}}}^{\to 0}}{\underbrace{\boxed{x-1}}_{\to 0}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\overbrace{\boxed{\frac{1}{x-1}}}^{\to-\infty}}{\underbrace{\boxed{e^{\frac{x^2}{1-x}}}}_{\to+\infty}}\underset{H}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{x(2-x)}{(x-1)^2}e^{\frac{x^2}{1-x}}}=\lim_{x\to 1^-}\underbrace{\boxed{\frac{1}{x(x-2)}}}_{\to -1}\underbrace{\boxed{e^{\frac{x^2}{x-1}}}}_{\to 0}=0=f_g'(0)$$

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\right):\ f'(x)=\left(e^{\frac{x^2}{x-1}}\right)'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}e^{\frac{x^2}{x-1}}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}e^{\frac{x^2}{x-1}}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

f est dérivable à gauche en 0.

Interprétation graphique : G_f admet une demi-tangente horizontale au point $J(0;1)$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\overbrace{\boxed{\frac{x^2}{x-1}}}^{\to-\infty}}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\overbrace{\boxed{\frac{x^2}{x-1}}}^{\to+\infty}}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x^2}{x-1}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\boxed{e^{x+1+\frac{1}{x-1}}}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\boxed{x}}_{\to+\infty}}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\boxed{\frac{e^{x+1}}{x}}}_{\to+\infty}\underbrace{\boxed{e^{\frac{1}{x-1}}}}_{\to 1}=+\infty$$

Calcul à part : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\boxed{e^{x+1}}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\boxed{x}}_{\to+\infty}}\underset{H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{1}=+\infty$

Conclusions :

G_f admet une $A.V.: x=1$, une $A.H.G.: y=0$ et une $B.P.D.$ dont la direction asymptotique est celle de (Oy).

c) Tableau des variations

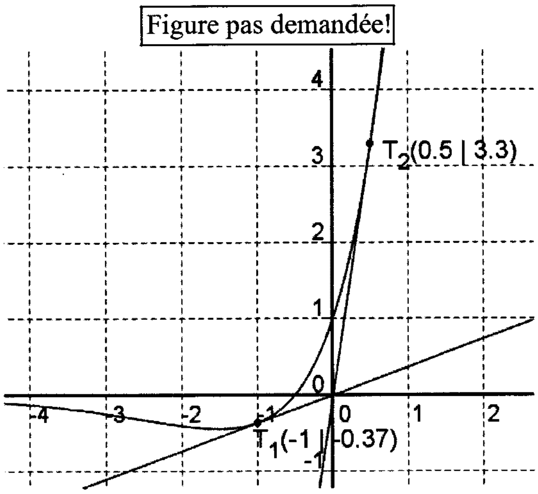
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}e^{\frac{x^2}{x-1}}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)=e^{\frac{x^2}{x-1}}$	0	$\nearrow$	1 (Max)	$\searrow$	$0 \| +\infty$	$\searrow$	e^4 (min)	$\nearrow$	$+\infty$

Solution Question 3 (5 points)

$f(x)=(2x+1)e^x$

$(\forall x\in\mathbb{R})\ :\ f'(x)=(2x+3)e^x$

Équation de la tangente à G_f au point d'abscisse a



$t_a\ :\ \ y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$\Leftrightarrow\ y=(2a+3)e^a(x-a)+(2a+1)e^a$

$\Leftrightarrow\ y=\left((2a+3)x-2a^2-a+1\right)e^a$

$O(0;0)\in t_a$

$\Leftrightarrow 0=\left((2a+3)0-2a^2-a+1\right)e^a$

$\Leftrightarrow 2a^2+a-1=0$

$\Leftrightarrow a=-1\vee a=\frac{1}{2}$

$t_{-1}\ :\ y=f'(-1)x\Leftrightarrow y=\frac{1}{e}x$ $\qquad t_{\frac{1}{2}}\ :\ y=f'(\frac{1}{2})x\Leftrightarrow y=4\sqrt{e}x$

Solution Question 4 $(7+2+5=14$ points$)$

$f(x)=\dfrac{\ln(x^3)}{x}=3\dfrac{\ln(x)}{x}$

a) $\operatorname{dom} f=\operatorname{dom} f'=\operatorname{dom} f''=]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}3\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to-\infty}}{\underbrace{x}_{\to0^+}}=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}3\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to+\infty}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$$

Conclusion : G_f admet une $A.V.: x=0$ et une $A.H.D.: y=0$.

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\ :\ f'(x)=3\frac{\frac{1}{x}x-\ln(x)}{x^2}=3\frac{1-\ln(x)}{x^2}\ ;\ f''(x)=3\frac{-\frac{1}{x}x^2+2x\ln(x)}{(x^2)^2}=\frac{3(2\ln(x)-3)}{x^3}$$

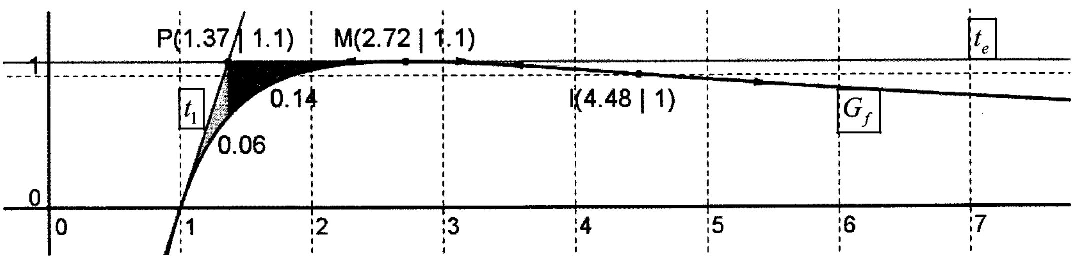
Tableau des variations

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{e}$	$\searrow$	0

Tableau de concavité

x	0		$\sqrt{e^3}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\cap$	$P.I.$	$\cup$	

Point d'inflexion : $I\left(\sqrt{e^3};\frac{9}{2\sqrt{e^3}}\right)$



b) Équation de la tangente à G_f au point d'abscisse a

$t_a\ :\ y = f'(a)(x-a)+f(a) \Leftrightarrow y = 3\frac{1-\ln(a)}{a^2}(x-a)+3\frac{\ln(a)}{a} \Leftrightarrow y = 3\frac{1-\ln(a)}{a^2}x+\frac{6\ln(a)-3}{a}$

$t_1\ :\ y = 3x-3$

$t_e\ :\ y = \frac{3}{e}$

c) $t_1 \cap t_e = \left\{P\left(\frac{e+1}{e};\frac{3}{e}\right)\right\}$

Soit A l'aire de la surface cherchée.

A_1

$= \int_1^{\frac{e+1}{e}}\left(3x-3-3\frac{\ln(x)}{x}\right)dx$

$= \left[\frac{3}{2}x^2-3x-\frac{3}{2}\ln^2(x)\right]_1^{\frac{e+1}{e}}$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{e+1}{e}\right)^2-3\frac{e+1}{e}-\frac{3}{2}\ln^2\left(\frac{e+1}{e}\right)-\frac{3}{2}+3$

$= -\frac{3}{2}\ln^2\left(\frac{e+1}{e}\right)+\frac{3}{2e^2} \approx 0,06u.a.$

A_2

$= \int_{\frac{e+1}{e}}^{e}\left(\frac{3}{e}-3\frac{\ln(x)}{x}\right)dx$

$= \left[\frac{3}{e}x-\frac{3}{2}\ln^2(x)\right]_{\frac{e+1}{e}}^{e}$

$= 3-\frac{3}{2}-\frac{3}{e}\frac{e+1}{e}+\frac{3}{2}\ln^2\left(\frac{e+1}{e}\right)$

$= \frac{3}{2}\ln^2\left(\frac{e+1}{e}\right)-\frac{3}{e}-\frac{3}{e^2}+\frac{3}{2} \approx 0,14u.a$

$A = A_1+A_2 = -\frac{3}{2}\ln^2\left(\frac{e+1}{e}\right)+\frac{3}{2e^2}+\frac{3}{2}\ln^2\left(\frac{e+1}{e}\right)-\frac{3}{e}-\frac{3}{e^2}+\frac{3}{2} = \boxed{\frac{3e^2-6e-3}{2e^2}u.a.} \approx 0,19u.a.$

OU

Soit $Q\left(1;\frac{3}{e}\right)$, alors $QP=\frac{1}{e}, QT=\frac{3}{e}$ et :

A

$= \int_1^e\left(\frac{3}{e}-3\frac{\ln(x)}{x}\right)dx-[TPQ]$

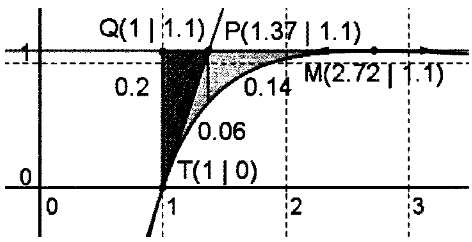
$= \left[\frac{3}{e}x-\frac{3}{2}\ln^2(x)\right]_1^e-\frac{QP\cdot QT}{2}$

$= \frac{3}{e}e-\frac{3}{2}-\frac{3}{e}-\frac{\frac{1}{e}\frac{3}{e}}{2}$

$= 3-\frac{3}{2}-\frac{3}{e}-\frac{3}{2e}-\frac{3}{2e^2}$

$= \boxed{\frac{3e^2-6e-3}{2e^2}u.a.} \approx 0,19u.a.$

Figure pas demandée



Solution Question 5 $(5+5=10 \text{ points})$

$\boxed{f(x)=\left(x-\frac{9}{2}\right)\ln\left(x^2+1\right)}$

a) $\text{dom} f = \text{dom} f' = \text{dom} f'' = \mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ f'(x)=\ln\left(x^2+1\right)+\left(x-\frac{9}{2}\right)\frac{2x}{x^2+1}=\ln\left(x^2+1\right)+\frac{x(2x-9)}{x^2+1}$

$(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ f''(x)=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{9x^2+4x-9}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+1\right)+9x^2+4x-9}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+9x^2+6x-9}{\left(x^2+1\right)^2}$

$2\cdot(-3)^3+9\cdot(-3)^2+6\cdot(-3)-9$, donc $2x^3+9x^2+6x-9$ est divisible par $x+3$.

Schéma de Horner

	2	9	6	−9
↓ +	0	−6	−9	9
↗·(−3)	2	3	−3	0

$2x^3+9x^2+6x-9=(x+3)(2x^2+3x-3)=2(x+3)\left(x-\frac{-3-\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{33}}{4}\right)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=\frac{-3-\sqrt{33}}{4} \vee x=\frac{-3+\sqrt{33}}{4}$

Tableau de concavité

x	$-\infty$		-3		$\frac{-3-\sqrt{33}}{4}$		$\frac{-3+\sqrt{33}}{4}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
G_f		$\cap$	$P.I.$	$\cup$	$P.I.$	$\cap$	$P.I.$	$\cup$	

G_f admet les trois points d'inflexion I_1, I_2 et I_3 avec :

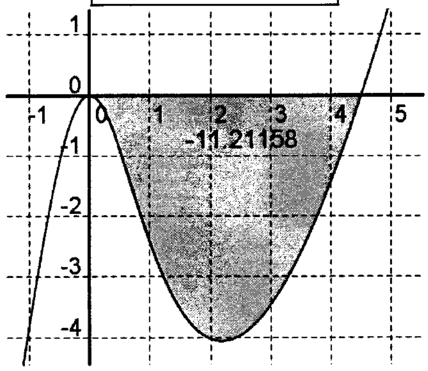
$x_{I_1}=-3$; $x_{I_2}=\frac{-3-\sqrt{33}}{4}$ et ; $x_{I_3}=\frac{-3+\sqrt{33}}{4}$

b) $(\forall x\in\mathbb{R})$: $\ln(x^2+1)\geq 0$ et $\ln(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$

Tableau des signes

x	$-\infty$		0		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$f(x)=\left(x-\frac{9}{2}\right)\ln(x^2+1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Figure pas demandée



A

$=-\int_0^{\frac{9}{2}}\left(x-\frac{9}{2}\right)\ln(x^2+1)\,dx$

Intégration par parties

$u(x)=\ln(x^2+1)$	$v(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}x$
$u'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$	$v'(x)=x-\frac{9}{2}$

$=-\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}x\right)\ln(x^2+1)\right]_0^{\frac{9}{2}}+\int_0^{\frac{9}{2}}\frac{x^3-9x^2}{x^2+1}\,dx$

$=\frac{81}{8}\ln\left(\frac{85}{4}\right)+\int_0^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{x}{x^2+1}+\frac{9}{x^2+1}+x-9\right)dx$

$=\frac{81}{8}\ln\left(\frac{85}{4}\right)+\left[-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+9\arctan(x)+\frac{1}{2}x^2-9x\right]_0^{\frac{9}{2}}$

$=\frac{81}{8}\ln\left(\frac{85}{4}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{85}{4}\right)+9\arctan\left(\frac{9}{2}\right)-\frac{243}{8}$

$=\boxed{\frac{77}{8}\ln\left(\frac{85}{4}\right)+9\arctan\left(\frac{9}{2}\right)-\frac{243}{8}\,u.a.}\approx 11{,}21\,u.a.$

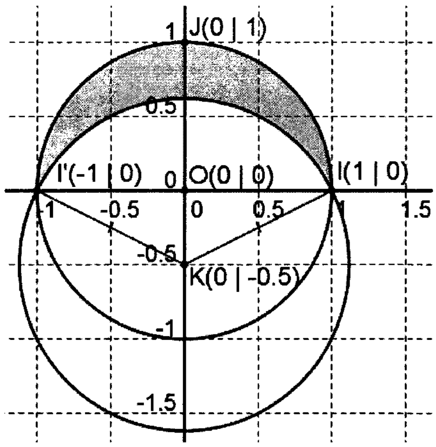
Solution Question 6 (7 points)

c' : $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{4}-x^2} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\sqrt{5-4x^2}-\frac{1}{2} \vee y=-\frac{1}{2}\sqrt{5-4x^2}-\frac{1}{2}$

$c\cap c'$

$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2+y^2+y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(-1;0)\vee(x;y)=(1;0)$

$c\cap c'=\{I'(-1;0);I(1;0)\}$



V

$$= \underbrace{\tfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3}_{\text{volume d'une boule}} - \pi\int_{-1}^{1}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{5-4x^2}-\tfrac{1}{2}\right)^2 dx$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi - \pi\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5-4x^2}\right)dx$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi - \pi\left[x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} + \pi\int_{-1}^{1}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{5-4x^2}-\tfrac{1}{2}\right)dx$$

$$= \cancel{\tfrac{4}{3}\pi} - \cancel{\tfrac{4}{3}\pi} + \pi\left\{ aire\begin{pmatrix}\text{secteur circulaire}\\ \text{de centre } K \text{ de}\\ \text{rayon } \tfrac{\sqrt{5}}{2} \text{ et d'angle } \widehat{IKI'}\end{pmatrix} - [KII']\right\}$$

$$= \pi\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot 2\cdot\arctan(2)}{2} - \pi\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{2}$$

$$= \boxed{\tfrac{5}{4}\pi\arctan(2)-\tfrac{\pi}{2}\,u.v.} \approx 2{,}78\,u.v.$$

OU

V

$$= \underbrace{\tfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3}_{\text{volume d'une boule}} - \pi\int_{-1}^{1}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{5-4x^2}-\tfrac{1}{2}\right)^2 dx$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi - \pi\int_{-1}^{1}\left(-x^2+\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5-4x^2}\right)dx$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi - \pi\left[\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} + \tfrac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{5-4x^2}\,dx$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi - \tfrac{7}{3}\pi + \tfrac{\sqrt{5}\pi}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{5}x\right)^2}\,dx$$

<u>Changement de variable</u>

$$\tfrac{2\sqrt{5}}{5}x = \sin(u)\ ;\ dx = \tfrac{\sqrt{5}}{2}\cos(u)\,du\ ;\ x=-1 \Rightarrow u = \arcsin\left(-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\ ;\ x=1 \Rightarrow u = \arcsin\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$= -\pi + \tfrac{\sqrt{5}\pi}{2}\int_{\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}^{\arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)} \tfrac{\sqrt{5}}{2}\cos^2(u)\,du$$

$$= -\pi + \tfrac{5\pi}{4}\int_{\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}^{\arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)} \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos(2u)\right)du$$

$$= -\pi + \tfrac{5\pi}{4}\left[\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{4}\sin(2u)\right]_{\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}^{\arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

$$= -\pi + \tfrac{5\pi}{4}\left[\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}\arcsin\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\tfrac{1}{4}\sin\left(\arcsin\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right)\\ -\tfrac{1}{2}\arcsin\left(-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\tfrac{1}{4}\sin\left(\arcsin\left(-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$= -\pi + \tfrac{5\pi}{4}\left[\arcsin\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{1-\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}\right]$$

$$= \boxed{\tfrac{5}{4}\pi\arcsin\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\tfrac{\pi}{2}\,u.v.} \approx 2{,}78\,u.v.$$

Solution Question 7 (5 points)

a) $\displaystyle\int \frac{\sin^2(2x)}{\cos(2x)}dx = \int \frac{1-\cos^2(2x)}{\cos(2x)}dx = \int \frac{1}{\cos(2x)}dx - \int \cos(2x)\,dx = \int \frac{1}{\cos(2x)}dx - \frac{1}{2}\sin(2x)$

Calcul de $\int \frac{1}{\cos(2x)}dx$

Changement de variable

$u = \tan(x)$; $dx = \frac{du}{1+u^2}$; $\cos(2x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

$$\int \frac{1}{\cos(2x)}dx = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{du}{1-u^2} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u}\right)du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right| + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\left(\forall \lambda \in \left[0;\tfrac{\pi}{4}\right[\right) : I(\lambda) = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right| - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\lambda = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tan(\lambda)}{1-\tan(\lambda)}\right| - \frac{1}{2}\sin(2\lambda)$$

b) $$\lim_{\lambda \to \frac{\pi}{4}^-} I(\lambda) = \lim_{\lambda \to \frac{\pi}{4}^-} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\ln\left| \frac{\overbrace{1+\tan(\lambda)}^{\to 2}}{\underbrace{1-\tan(\lambda)}_{\to 0^+}} \right|}_{\to +\infty} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2\lambda)}_{\to 1} \right) = +\infty$$