Corrigé - Mathématiques II

2012

Section B

Question I

$$f(x) = \begin{cases} (2+x)\cdot e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -x+2x\ln x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

1) Etudions la continuité de f en 0 :

- $\lim\limits_{x\to 0^-} (2+x)\cdot e^{\frac{1}{x}} = \text{"} 2\cdot 0^+ \text{"} = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} -x+2x\cdot\ln x^2 = \text{"} 0^- + 2\cdot 0^+\cdot(-\infty)\text{"}$ f.i.

$= \lim\limits_{x\to 0^+} -x + 4\,\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \text{"}0^- + 4\cdot 0^-\text{"} = 0^-$

Calcul à part :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0^-$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ et

f est donc continue en 0.

On en tire que $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} cf = \mathbb{R}$

2) - $\lim\limits_{x\to -\infty} (2+x)\cdot e^{\frac{1}{x}} = \text{"}-\infty\cdot 1\text{"} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2+x}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}} = \text{"}1\cdot 1\text{"} = 1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} (2+x)\cdot e^{\frac{1}{x}} - x$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} 2\cdot e^{\frac{1}{x}} + x\cdot e^{\frac{1}{x}} - x$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} 2\cdot e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

$= \text{"}2\cdot 1 + 1\text{"} = 3$

Calcul à part :

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$

A.O.G. d'équation $y = x+3$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} -x+2x\ln x^2 = \text{"}-\infty+\infty\text{"}$ f.i.

$= \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(-1+2\ln x^2\right) = \text{"}+\infty\cdot(+\infty)\text{"} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (-1+2\ln x^2) = +\infty$

B.P.D. dans la direction de (Oy)

3) - $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(2+x)\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} (2+x)\cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} = \text{"}(2+0^-)\cdot 0^-\text{"} = 0^-$

Calcul à part :

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-e^{\frac{1}{x}}\right) = 0^-$

f est donc dérivable à gauche en 0 et $f'_G(0) = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-1+2\ln x^2)$

$= \text{"}-1+2\cdot(-\infty)\text{"} = -\infty$

f n'est donc pas dérivable à droite en 0

On en déduit que f n'est pas dérivable en 0 et $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}_0$

4) • $\forall x \in]-\infty;0[$ on a

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} + (2+x)\cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{(x^2-x-2)\,e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \quad e^{\frac{1}{x}} > 0,\ x^2 > 0$$

a le même signe que x^2-x-2.

Calculons les racines de x^2-x-2 :

$$\Delta = 1+8 = 9$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

• $\forall x \in]-\infty;0[$ on a

$$f''(x) = \frac{\left[(2x-1)\cdot e^{\frac{1}{x}} + (x^2-x-2)\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]\cdot x^2 - (x^2-x-2)e^{\frac{1}{x}}\cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{\left[(2x^3-x^2)e^{\frac{1}{x}} - (x^2-x-2)e^{\frac{1}{x}}\right] - (2x^3-2x^2-4x)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$$

$$= \frac{(\cancel{2x^3}\cancel{-x^2}\cancel{-x^2}+x+2\cancel{-2x^3}\cancel{+2x^2}+4x)\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$$

$$= \frac{(5x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^4} \quad e^{\frac{1}{x}} > 0,\ x^4 > 0$$

a le même signe que $5x+2$ (Racine : $-\frac{2}{5}$)

• $\forall x \in]0;+\infty[$ on a

$$f'(x) = (-x+4x\ln x)' = -1+4\ln x + 4x\cdot\frac{1}{x}$$

$$= 4\ln x + 3$$

On a $4\ln x + 3 \gtreqless 0$

$$\Leftrightarrow \ln x \gtreqless -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x \gtreqless e^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} = \frac{\sqrt[4]{e}}{e}$$

• $\forall x \in]0;+\infty[$ on a

$$f''(x) = \frac{4}{x} > 0 \text{ sur }]0;+\infty[$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{5}$		0		$\frac{\sqrt[4]{e}}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	M	↘	I	↘	0	↘	m	↗	$+\infty$

5) Maximum local $M\left(-1;\frac{1}{e}\right)$

Minimum local $m\left(\frac{\sqrt[4]{e}}{e};\frac{-4\sqrt[4]{e}}{e}\right)$

Point d'inflexion $I\left(-\frac{2}{5};\frac{8\sqrt{e}}{5e^3}\right)$

avec $\frac{1}{e} \simeq 0,37$

$\frac{\sqrt[4]{e}}{e} \simeq 0,47$

$\frac{-4\sqrt[4]{e}}{e} \simeq -1,89$

$\frac{8\sqrt{e}}{5e^3} \simeq 0,13$

6) L'équation de cette tangente s'écrit

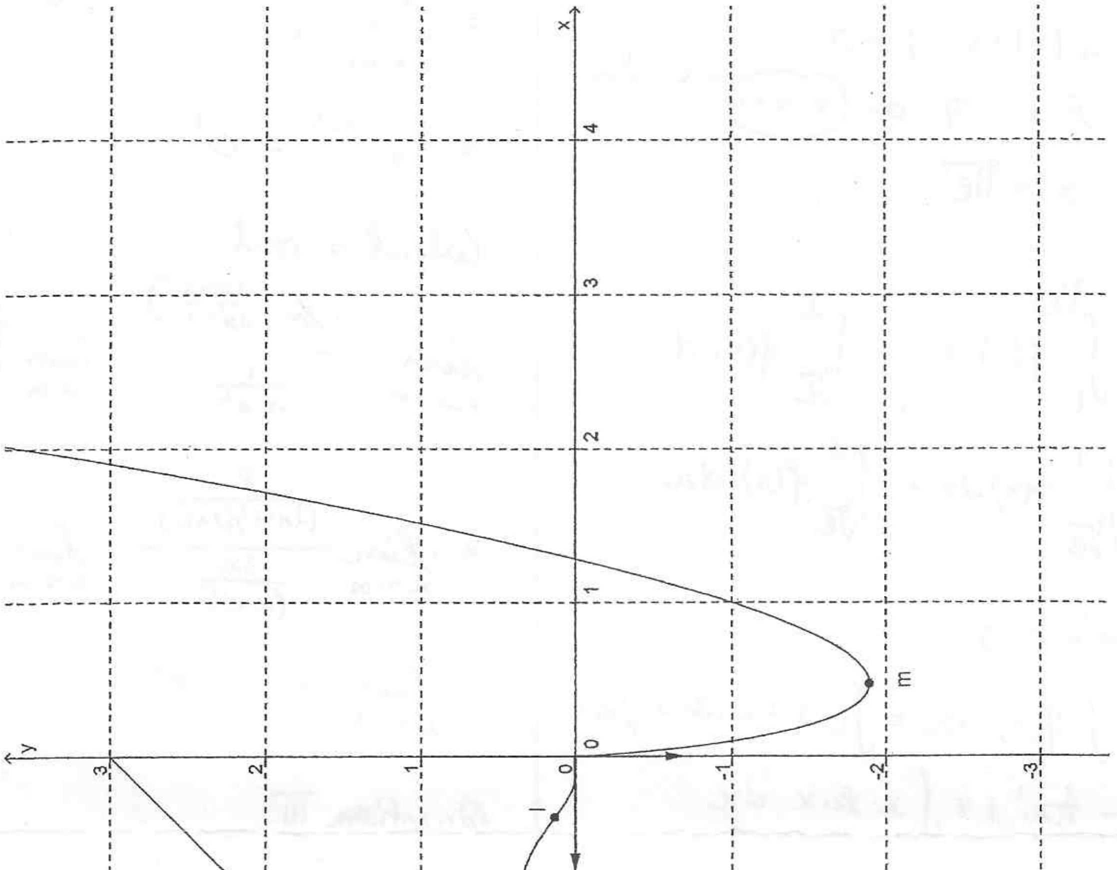
$$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{e}}{e}(x+2) + 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{e}}{e}x + \frac{2\sqrt{e}}{e}$$

7) Tableau des valeurs

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$1,5$	2
$f(x)$	$-2,5$	$-1,6$	$-0,7$	0	$0,4$	0	-1	$0,9$	$3,5$


x
y
M
m
I

8) Déterminons d'abord la racine de f sur $]0;+\infty[$:

$$-x+2x\ln x^2=0$$
$$\Leftrightarrow -x+4x\ln x=0$$
$$\Leftrightarrow x(4\ln x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{4} \text{ ou } x=0 \text{ à écarter}$$
$$\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{e}$$

Alors

$$\mathcal{A}=-\int_1^{\sqrt[4]{e}} f(x)\,dx+\int_{\sqrt[4]{e}}^2 f(x)\,dx$$
$$=\int_{\sqrt[4]{e}}^1 f(x)\,dx+\int_{\sqrt[4]{e}}^2 f(x)\,dx$$

Déterminons

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(-x+4x\ln x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+4\int x\cdot\ln x\,dx$$

<u>I.P.P.</u>

on pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x$

alors $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=\frac{1}{2}x^2$

D'où

$$F(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x^2\ln x-2\int x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+2x^2\ln x-x^2$$
$$=-\frac{3}{2}x^2+2x^2\ln x$$

On en déduit que

$$\mathcal{A}=F(1)-F(\sqrt[4]{e})+F(2)-F(\sqrt[4]{e})$$
$$=F(1)+F(2)-2F(\sqrt[4]{e})$$
$$=-\frac{3}{2}-6+8\ln 2-2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{e}+\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)$$
$$=-\frac{15}{2}+8\ln 2+2\sqrt{e}\ \text{u.a.}$$

<u>Question II</u>

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{1-x^2}=\text{"}1^{-\infty}\text{" f.i.}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^{(1-x^2)\cdot\ln\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)}$$

$$=\text{"}e^{-\infty}\text{"}=0^+$$

Calcul à part :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)}{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x+1}{2x-3}\cdot\frac{4x+2-4x\cdot}{(2x+1)^2}}{\frac{2x}{(1-x^2)^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8}{(2x-3)(2x+1)}}{\frac{2x}{(1-x^2)^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^4+\dots}{8x^3+\dots}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

<u>Question III</u>

1) $2\cdot(5^{2x}-5^{-x+1})=3$

$\forall x\in\mathbb{R}$ on a

$$2\cdot5^{2x}-2\cdot5\cdot5^{-x}=3 \quad |\cdot5^x>0$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot5^{3x}-3\cdot5^x-10=0$$

on pose $5^x=y>0$ et on obtient

$$2y^3-3y-10=0$$

<u>Schéma de Horner</u>

	2	0	-3	-10
2		4	8	10
	2	4	5	0

d'où $(y-2)\cdot\underbrace{(2y^2+4y+5)}_{\Delta<0}=0 \Leftrightarrow y=2$

et donc $5^x=2 \Leftrightarrow x=\log_5 2$

$$S=\{\log_5 2\}$$

2) $\log_x |x-1| \leq \log_{\sqrt{x}}(x+1) + \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$

C.E. : (1) $x>0$ et $x \neq 1$

(2) $x \neq 1$

(3) $x>0$ et $x \neq 1$

(4) $x > -1$

(5) $x>0$ et $x \neq 1$

(6) $x<2$

$\forall x \in]0;1[\cup]1;2[$ on a

$$\frac{\ln|x-1|}{\ln x} \leq \frac{2 \cdot \ln(x+1)}{\ln x} - \frac{\ln(2-x)}{\ln x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln[|x-1| \cdot (2-x)]}{\ln x} \leq \frac{\ln(x+1)^2}{\ln x}$$

Distinguons deux cas :

- $\forall x \in]0;1[$ on a

$$\ln[(1-x)(2-x)] \geq \ln(x+1)^2 \quad | e$$

$$\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 2-x-2x+\cancel{x^2} \geq \cancel{x^2}+2x+1$$

$$\Leftrightarrow 5x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{5} \qquad S_1 =]0; \frac{1}{5}]$$

- $\forall x \in]1;2[$ on a

$$\ln[(x-1)(2-x)] \leq \ln(x+1)^2 \quad | e$$

$$\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \cancel{2x}-x^2-2+x \leq x^2+\cancel{2x}+1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2x^2-x+3}_{>0 \text{ (car } \Delta<0)} \geq 0 \quad \text{toujours vrai !}$$

$$S_2 =]1;2[$$

Conclusion :

$$S =]0; \frac{1}{5}] \cup]1;2[$$

Question IV

1) $$I_1 = \int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}-1} (1+x)^2 \cdot \sin[\ln(1+x)]\, dx$$

Par changement de variable :

on pose $1+x = y \Leftrightarrow x = y-1$

alors $dx = dy$

et $x = e^{\frac{\pi}{2}}-1 \Leftrightarrow y = e^{\frac{\pi}{2}}$

$x=0 \Leftrightarrow y=1$

d'où

$$I_1 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} y^2 \cdot \sin(\ln y)\, dy$$

I.P.P.

on pose $f(y) = \sin(\ln y)$ et $g'(y) = y^2$

alors $f'(y) = \frac{1}{y}\cos(\ln y)$ et $g(y) = \frac{1}{3}y^3$

d'où

$$I_1 = \left[\frac{1}{3}y^3 \cdot \sin(\ln y)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{3}\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} y^2 \cos(\ln y)\, d$$

I.P.P.

on pose $u(y) = \cos(\ln y)$ et $v'(y) = y^2$

alors $u'(y) = -\frac{1}{y}\sin(\ln y)$ et $v(y) = \frac{1}{3}y^3$

d'où

$$I_1 = \left[\frac{1}{3}y^3 \sin(\ln y) - \frac{1}{9}y^3 \cos(\ln y)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{9}\underbrace{\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin(\ln y)\, dy}_{I_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{9} I_1 = \frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{3}{10}e^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{10}$$

2) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\cos x + 3}\, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{3+3\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})}{\cancel{2}(2+\tan^2\frac{x}{2})}\, dx$$

Changement de variable :

on pose $\tan\frac{x}{2} = y \Leftrightarrow x = 2\arctan y$

alors $dx = \frac{2}{1+y^2}\, dy$

et $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y = 1$

d'où

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1+y^2}{2+y^2} \cdot \frac{2}{1+y^2}\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{2+y^2}\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dy$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dy$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1$$

$$= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$