Examen de fin d'études secondaires
Section $\boxed{B}$. Maths $\underline{II}$, le 15 septembre 2003.

$\underline{I}$

$$\operatorname{Arc\,sin}(1-x) + \frac{\pi}{6} = \operatorname{Arc\,cos} x \qquad (E)$$

<u>existence :</u> $\quad -1 \le 1-x \le 1 \quad$ et $\quad -1 \le x \le 1$

$\quad 0 \le x \le 2 \qquad$ L'équation existe $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>résolution :</u> les solutions de l'équation sont parmi celles de

$$\cos\left[\operatorname{Arc\,sin}(1-x) + \tfrac{\pi}{6}\right] = \cos(\operatorname{Arc\,cos} x)$$

$\Leftrightarrow \cos[\operatorname{Arc\,sin}(1-x)]\cdot\cos\frac{\pi}{6} - \sin[\operatorname{Arc\,sin}(1-x)]\sin\frac{\pi}{6} = x$

$\Leftrightarrow \cos[\operatorname{Arc\,sin}(1-x)]\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - (1-x)\cdot\frac{1}{2} = x \qquad |\cdot 2$

$\Leftrightarrow \cos[\operatorname{Arc\,sin}(1-x)]\cdot\sqrt{3} = 2x+1-x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot\cos[\operatorname{Arc\,sin}(1-x)] = x+1 \qquad (E_1)$

Posons : $\cos[\operatorname{Arc\,sin}(1-x)] = \cos a$ avec $a = \operatorname{Arc\,sin}(1-x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\sin a = 1-x$

Donc : $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - 1 + 2x - x^2 = 2x - x^2$

Et $\cos a = +\sqrt{2x-x^2}$

$(E_1) \rightarrow \underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(2x-x^2)}}_{\geq 0} = \underbrace{x+1}_{\geq 0} \quad \Rightarrow x \in D = [0,1]$!

Elevons au carré : $3\cdot(2x-x^2) = x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in D.$

$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$

$\underline{II}$

1° $$\log_{1/4}(3x-x^2) - \log_2\frac{1}{x} + \log_4|x-1| = 0 \qquad (E)$$

<u>existence :</u> $\cdot\ 3x - x^2 = x(3-x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0;3[$

$\cdot\ x > 0$ et $x \neq 1$

(E) existe $\forall x \in]0,1[\cup]1,3[$.

<u>résolution :</u> $$\frac{\ln(3x-x^2)}{-2\ln 2} - \frac{-\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln|x-1|}{2\ln 2} \qquad |\cdot 2\ln 2$$

$\Leftrightarrow 2\ln x + \ln|x-1| = \ln(3x-x^2)$

$\Leftrightarrow \ln[x^2|x-1|] = \ln(3x-x^2)$

<u>Si $x \in]0,1[$ alors :</u> $\quad x^2(1-x) = 3x - x^2$

$\Leftrightarrow -x(x^2-2x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0 \notin]0,1[$

car $x^2 - 3x + 3 > 0$, vu que $\Delta = -3 < 0$

<u>Si $x \in]1,3[$ alors :</u> $\quad x^2(x-1) = 3x - x^2$

$\Leftrightarrow x(x^2-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ (à rejeter) ou $x = -\sqrt{3}$ (à rejeter) ou $x = \sqrt{3}$.

Finalement : $\quad S = \{\sqrt{3}\}$.

2° $f(x) = \sqrt{x}^{\frac{1}{x}} = \exp\left[\frac{1}{x}\cdot\ln\sqrt{x}\right] = \exp\left[\frac{1}{2x}\cdot\ln x\right].$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^*_+$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{2x}\cdot\ln x} = \exp\left[\lim\limits_{x\to 0^+} \overset{+\infty}{\frac{1}{x}}\cdot\overset{-\infty}{\ln\sqrt{x}}\right] = e^{-\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \exp\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{x}\right) = \exp\left[\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}\right] = \exp\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\right] = 1$

- $\forall x > 0 :\ f'(x) = e^{\frac{1}{2x}\cdot\ln x}\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\cdot\ln x + \frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x^2}\sqrt{x}^{1/x}\cdot(1-\ln x).$

3° (E) $e^{2x} - m\cdot e^{x} + (m-2) = 0$ $(m \in \mathbb{R})$

$\Delta_m = m^2 - 4(m-2) = m^2 - 4m + 8 > 0$ $(\Delta' = 4 - 8 = -4 < 0)$.

$S_m = -\frac{b}{a} = m$; $P_m = \frac{c}{a} = m - 2$.

Tableau :

m	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Δ_m		$+$		$+$		$+$	
S_m		$-$	0	$+$		$+$	
P_m		$-$		$-$	0	$+$	

Conclusion :

$m \in]-\infty, 0[$: 2 rac. réelles de signes contraires, celle qui est négative étant la plus grande en valeur absolue ; donc (E) admet 1 seule solution.

$m = 0$: 2 rac. réelles opposées ; (E) admet 1 seule solution

$m \in]0;2[$: 2 rac. réelles de signes contraires ; celle qui est positive ayant la plus grande valeur absolue, donc (E) admet 1 seule solution.

$m = 2$: 2 rac. réelles positives, l'une étant nulle, (E) admet 1 seule solution.

$m \in]2;+\infty[$: 2 rac. réelles positives ; (E) admet 2 solutions

4° $f : x \mapsto y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$.

a) · dom $f =]0;+\infty[$.

· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{4}(2\ln x - 3)\right] = +\infty$

Γ_f admet une branche parabolique de direction asymptotique.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} - \frac{3}{4}x^2\right] = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} - \frac{3}{4}x^2\right] = 0$

· dom $f' =]0;+\infty[$; $f'(x) = x\cdot\ln x + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{3}{2}x = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$

· $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = e$

$f(e) = -\frac{1}{4}e^2 \simeq -1,85$.

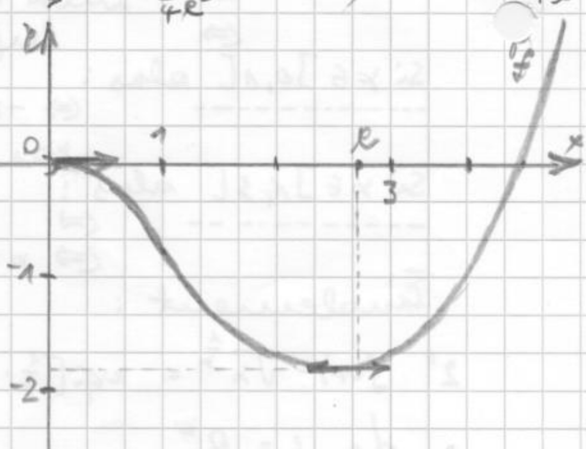
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

· dom $f'' =]0;+\infty[$.

$f''(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x$

$f''(x) = \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\frown$	$-\frac{3}{4}$	$\smile$	



· $f(1) = -\frac{3}{4}$; $f(e) = -\frac{1}{4}e^2$;

$f(e^{3/2}) = 0$; $(e^{3/2} \cong 4,5)$

$f(5) \cong 1,37$.

b.) $\mathcal{A}(\lambda) = -\int_\lambda^{e^{3/2}} f(x)\,dx$

$\mathcal{A}(\lambda) = -\frac{1}{2}\int_\lambda^{e^{3/2}} x^2\ln x\,dx + \frac{3}{4}\int_\lambda^{e^{3/2}} x^2\,dx$ $\quad u(x) = \ln x$, $v'(x) = x^2$; $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{1}{3}x^3$

$\mathcal{A}(\lambda) = -\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left[x^3\ln x\right]_\lambda^{e^{3/2}} - \frac{1}{3}\int_\lambda^{e^{3/2}} x^2\,dx\right\} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\left[x^3\right]_\lambda^{e^{3/2}}$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left[\frac{1}{18}\cdot e^{9/2} + \frac{1}{6}\lambda^3\ln\lambda - \frac{11}{36}\lambda\right]$ unités d'aire.

c) $\lim_{x \to 0^+} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0^+} \left(\frac{1}{18} e^{9/2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\ln \lambda}{\lambda^{-3}} - \frac{11}{36} \lambda \right) = \frac{1}{18} e^{9/2}$ u.a.

III

1°

a) $I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \int \frac{(1+\tan^2\frac{x}{2})\frac{1}{2}dx}{\tan\frac{x}{2}}$

Posons : $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow dt = (1+\tan^2\frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2} dx$

donc : $I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + k = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + k.$

b) $J = \int_{\pi/2}^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\, dx = \int_{\pi/2}^{2\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\, dx = \sqrt{2}\int_{\pi/2}^{2\pi} \left|\cos\frac{x}{2}\right| dx$

$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} \cos\frac{x}{2} \iff -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \iff -\pi < x < \pi \\ -\cos\frac{x}{2} \iff \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2} \iff \pi < x < 3\pi \end{cases}$

$J = \sqrt{2}\left\{\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx\right\} = 2\sqrt{2}\left[\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} - 2\sqrt{2}\left[\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}$

$J = 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + 1\right) = 4\sqrt{2} - 2.$

2°

a) $\sin^6 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^6 = \left(\frac{1}{2i}\right)^6 \left(e^{6ix} - 6 \cdot e^{4ix} + 15 \cdot e^{2ix} - 20 + 15 e^{-2ix} - 6 e^{-4ix} + e^{-6ix}\right)$

$= -\frac{1}{64}(2\cos 6x - 12\cos 4x + 30 \cdot \cos 2x - 20)$

$= -\frac{1}{32}\left(\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}\right)$.

b.) $\int_0^{\pi/6} (1+\cos x)^4 \cdot (1-\cos x)^3 dx = \int_0^{\pi/6} (1+\cos x)\left[(1+\cos x)(1-\cos x)\right]^3 dx$

$= \int_0^{\pi/6} (1+\cos x)\sin^6 x\, dx = \int_0^{\pi/6} \sin^6 x\, dx + \int_0^{\pi/6} \sin^6 x \cos x\, dx.$

$= -\frac{1}{32}\left[\frac{\sin 6x}{6}\right]_0^{\pi/6} + \frac{3}{16}\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi/6} - \frac{15}{32} \cdot \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/6} + \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{7}\left[\sin^7 x\right]_0^{\pi/6}$

$= -\frac{1}{192} \cdot 0 + \frac{3}{64} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{15}{64} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{5\pi}{96} + \frac{1}{896} - \frac{3\sqrt{3}}{32} \simeq 0,0024.$

3° RON$(O, \vec{i}, \vec{j})$: $A(0,0)$; $B(2r, 0)$; $C(r, r)$ $\quad (r > 0)$.

a) Équation du cercle C_1 de centre $O_1(0, r)$ et de rayon r :

* $C_1 \equiv x^2 + (y-r)^2 = r^2 \iff y = r \pm \sqrt{r^2 - x^2}$

Équation de l'arc $\widehat{AC}$: $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$ avec $0 \le y \le r$ et $0 \le x \le r$.

Aire de la partie hachurée : $\mathcal{A} = 2\int_0^r (r - \sqrt{r^2 - x^2})\, dx$

Posons : $x = r \cdot \cos t$ $\quad x = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$ $\quad r^2 - x^2 = r^2(1 - \cos^2 t)$

$dx = -r \sin t\, dt$ $\quad x = r \iff t = 0.$ $\quad = r^2 \sin^2 t$

donc : $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = -r^2 \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t\, dt = -\frac{r^2}{2}\int_{\pi/2}^0 (1 - \cos 2t)\, dt$

$= -\frac{1}{2} r^2 [t]_{\pi/2}^0 + \frac{1}{4} r^2 [\sin 2t]_{\pi/2}^0 = \frac{\pi r^2}{4}.$

c.à.d. $\mathcal{A} = 2\int_0^r r\, dx - 2\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2r[x]_0^r - 2 \cdot \frac{\pi r^2}{4}$

$\mathcal{A} = \left(2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2\right)$ unités d'aire.

* L'aire de la partie hachurée est égale à 2 fois l'aire d'un carré de côté r moins l'aire d'un quart de disque de rayon r :

$\mathcal{A} = 2\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right) = \left(2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}\right)$ unités d'aire.

b.) $v = 2\pi \int_0^r \left(r - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$

$v = 2\pi \int_0^r \left[r^2 - 2r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2\right] dx$

$v = 4\pi r^2 [x]_0^r - 4\pi r \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx - \frac{2\pi}{3} \cdot [x^3]_0^r$

$v = 4\pi r^3 - 4\pi r \cdot \frac{\pi r^2}{4} - \frac{2\pi}{3} r^3 = 4\pi r^3 - \pi^2 r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$v = \left(\frac{10}{3}\pi r^3 - \pi^2 r^3\right)$ unités de volume.