Examen de fin d'études secondaires.
Section [B]. Maths 2 16 septembre 2002.

---

# I

$$\begin{cases} f : x \mapsto y = \operatorname{Arctan}[2\ln(-x)] & \forall x \neq 0. \\ f(0) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_-$ : $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_-$ en tant que composée de fonctions continues et dérivables

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} = f(0)$ : donc $f$ est continue en 0.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{1+4\ln^2(-x)} \cdot \frac{2}{x}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to -\infty}}{\underbrace{1+4\ln^2(-x)}_{\to +\infty}} \text{ f.i.}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-\frac{2}{x^2}}{8\ln(-x) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\frac{1}{x}}{8 \cdot \ln(-x)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{8}{x}} = -\infty$$

donc $f$ n'est pas dérivable en 0 ; donc $\operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}_-$ ; $\operatorname{dom}_d f = \mathbb{R}^*_-$.

2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ A.H. $y = \frac{\pi}{2}$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$ : $f'(x) = \frac{1}{1+4\ln^2(-x)} \cdot \frac{2}{x} < 0$ donc $f$ est $\searrow$ sur $\mathbb{R}_-$

4) $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$ : $f''(x) = -2 \cdot \frac{4\ln^2(-x) + 8\ln(-x) + 1}{x^2[1+4\ln^2(-x)]^2}$

$f''(x) = 0 \iff \ln(-x) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\ln(-x) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff x = -e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \simeq -0{,}87$ ou $x = -e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \simeq -0{,}15$

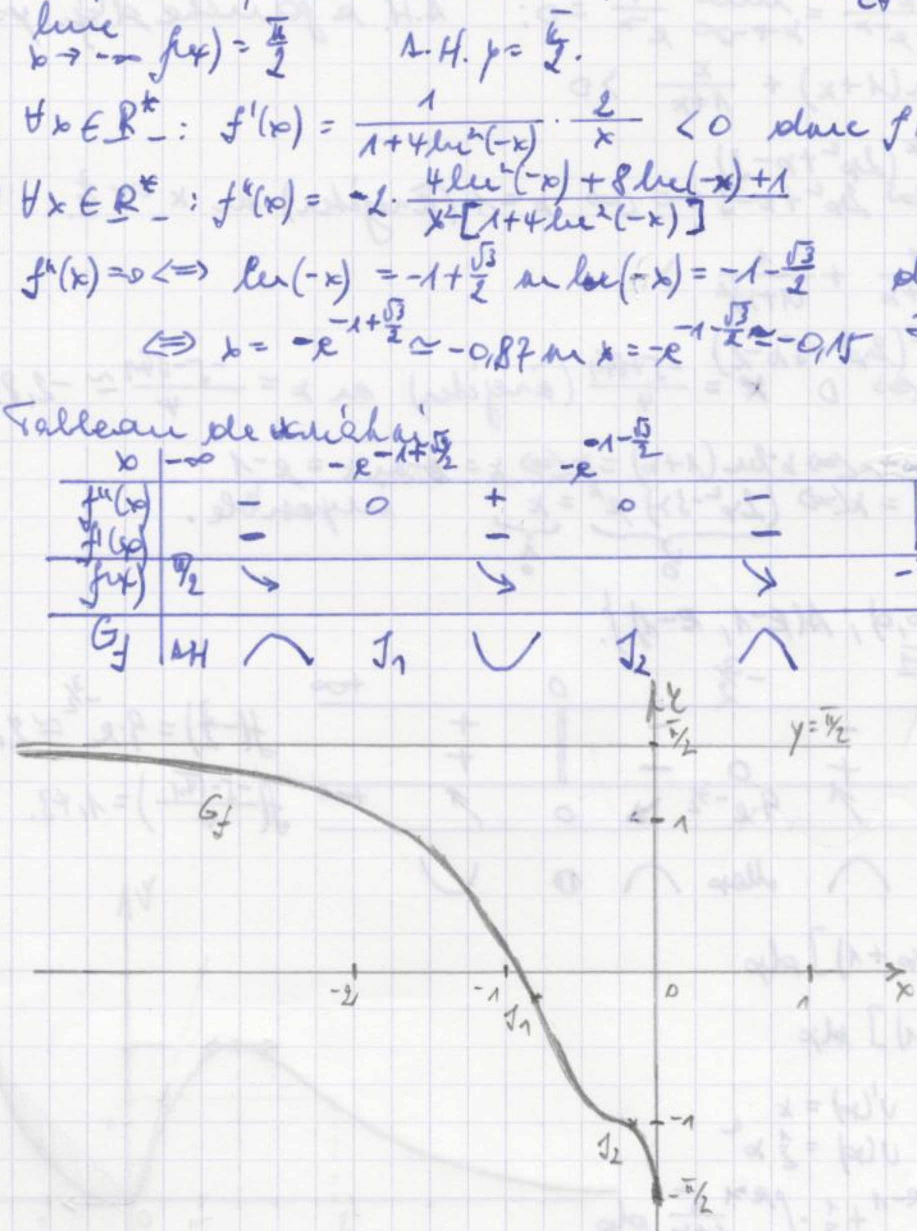
donc : $f''(x) > 0 \iff -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < \ln(-x) < -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\iff -e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}} < x < -e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ | | $-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ | | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | ‖ |
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | $-\frac{\pi}{2}$ |
| $G_f$ | AH | $\frown$ | $I_1$ | $\smile$ | $I_2$ | $\frown$ | |

$f(-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}-2) \simeq -0{,}2$

$f(-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}) = \operatorname{Arctan}(-\sqrt{3}-2) \simeq -1$




$G_f$ admet 2 points d'inflexions $I_1$ et $I_2$ d'abscisses respectives :

$-e^{-1+\sqrt{3}/2} \simeq -0{,}87$.

$-e^{-1-\sqrt{3}/2} \simeq -0{,}2$.

# II

$$\begin{cases} \forall x < 0 : f(x) = (2x^2 - 3x) \cdot e^x \\ \forall x \geq 0 : f(x) = x \cdot \ln(1+x) \end{cases}$$

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
$f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*_-$ et sur $\mathbb{R}_+$ en tant que composée et produit de fonctions continues et dérivables.

$\lim\limits_{x\to 0^-} (2x^2-3x)\cdot e^x = 0 = f(0)$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1+x) = 0 = f(0)$ : $f$ est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1+x) = \ln 1 = 0 = f'_d(0)$ — $f$ est dér. à droite et à gauche en 0 ;
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x-3)\cdot e^x = -3 = f'_g(0)$
mais $f$ n'est pas dérivable en 0 ; $\mathcal{D}_{\text{con}} f = \mathbb{R}$ ; $\mathcal{D}_{\text{dér}} f = \mathbb{R}^*$.

Équation de la demi-t$^{te}$ à droite en 0 : $y = 0$.
Équation de la demi-t$^{te}$ à gauche en 0 : $y = -3x$.
L'origine $O(0,0)$ est un point anguleux.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$ : B.P. de D.A. $(Oy)$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-3}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{e^{-x}} = 0$ : A.H. à gauche d'éq. $y = 0$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ : $f'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-$ : $f'(x) = e^x(2x^2+x-3)$
$f'(x) = 0 \iff 2x^2+x-3 = 0 \iff x = 1$ (à rejeter) ou $x = -\frac{3}{2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ : $f''(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-$ : $f''(x) = e^x(2x^2+5x-2)$
$f''(x) = 0 \iff x = \dfrac{-5+\sqrt{41}}{4}$ (à rejeter) ou $x = \dfrac{-5-\sqrt{41}}{4} \simeq -2{,}85$

4) $G_f \cap \Delta$ : $\forall x \geq 0$ : $f(x) = x \iff x\cdot\ln(1+x) = x \iff x = 0$ ou $x = e-1$
$\forall x < 0$ : $f(x) = x \iff \underbrace{(2x^2-3x)\cdot e^x}_{>0} = \underbrace{x}_{<0}$ impossible.

donc : $G_f \cap \Delta = \{O(0,0)\,;\, A(e-1,\, e-1)\}$.

5)

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-5-\sqrt{41}}{4}$ | | $-\frac{3}{2}$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | + | 0 | − | | − | ‖ | + | |
| $f'(x)$ | | + | | + | 0 | − | ‖ | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 1,43 | ↗ | $9\cdot e^{-3/2}$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |
| $G_f$ | AH | ∪ | P.I. | ∩ | Max | ∩ | O | ∪ | |

$f(-\frac{3}{2}) = 9\cdot e^{-3/2} \simeq 2{,}01$
$f(\frac{-5-\sqrt{41}}{4}) = 1{,}43$.

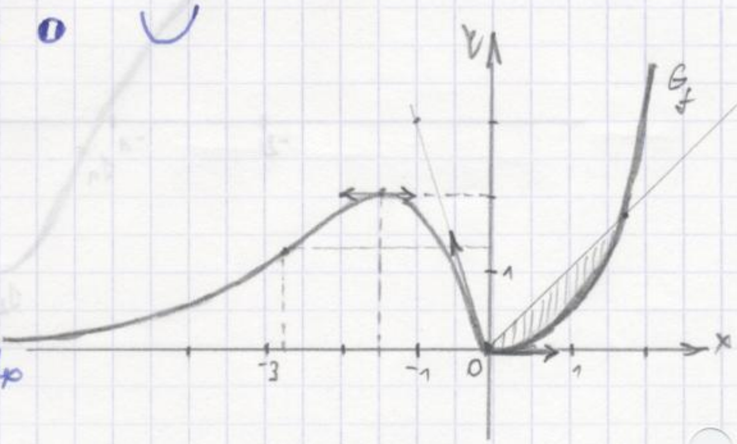
6) $\mathcal{A} = \int_0^{e-1} [x - x\cdot\ln(x+1)]\,dx$
$\mathcal{A} = \int_0^{e-1} x[1-\ln(x+1)]\,dx$

$u(x) = 1-\ln(1+x)$ $\quad v'(x) = x$
$u'(x) = -\dfrac{1}{1+x}$ $\quad v(x) = \frac{1}{2}x^2$

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left[x^2(1-\ln(x+1))\right]_0^{e-1} + \frac{1}{2}\cdot\int_0^{e-1} \dfrac{x^2}{1+x}\,dx$

$\mathcal{A} = 0 + \frac{1}{2}\int_0^{e-1}\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}\right)dx$

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^{e-1} = \dfrac{e^2-4e+5}{4}$ unités d'aire.



## III

a) $F(x) = \int \frac{4x^3 - 2x}{9+4x^4}\,dx = \frac{4}{16}\int \frac{16x^3\,dx}{9+4x^4} - \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{4}\int \frac{\frac{4}{3}x\,dx}{1+\left(\frac{2}{3}x^2\right)^2}$ $\qquad I = \mathbb{R}$

$= \frac{1}{4}\ln(9+4x^4) - \frac{1}{6}\cdot \text{Arctan}\,\frac{2x^2}{3} + k.$

b) $G(x) = \int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-2}}$ $\qquad I = ]\sqrt{2}; +\infty[$ ou $I = ]-\infty; -\sqrt{2}[$.

ch$^t$ de variable : $x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{t^2}\cdot dt$ ; $x^2 - 2 = \frac{1}{t^2} - 2 = \frac{1-2t^2}{t^2}$.

$G(x) = \int \frac{\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-2t^2}}{t}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\sqrt{2}\,dt}{\sqrt{1-(t\sqrt{2})^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\text{Arcsin}\,t\sqrt{2} + k$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\text{Arcsin}\,\frac{\sqrt{2}}{x} + k.$

c) $H(x) = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\,dx$ $\qquad u(x) = \sin(\ln x)$, $u'(x) = \frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x)$ $\qquad v'(x) = 1$, $v(x) = x$

$H(x) = [x\cdot\sin(\ln x)]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)\,dx$ $\qquad u(x) = \cos(\ln x)$, $u'(x) = -\frac{1}{x}\cdot\sin(\ln x)$ $\qquad v'(x) = 1$, $v(x) = x$

$H(x) = 0 - \int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)\,dx$

$H(x) = -[x\cdot\cos(\ln x)]_1^{e^\pi} - H(x) \Leftrightarrow 2H(x) = -(-e^\pi - 1) \Leftrightarrow H(x) = \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$

## IV

a) $$\log_{x-2}(x+4) + \frac{1}{\log_{x-3}(x-2)} \leq 2 - \log_{x-2} 2 \qquad (I)$$

Existence :
- $x - 2 > 0$ et $x - 2 \neq 1$
- $x - 3 > 0$ et $x - 3 \neq 1$
- $\log_{x-3}(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$
- $x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$

(I) existe $\forall x \in ]3; +\infty[ - \{4\}$.

Résolution : (I) $\Leftrightarrow \log_{x-2}(x+4) + \log_{x-2}(x-3) \leq \log_{x-2}(x-2)^2 + \log_{x-2}\frac{1}{2}$

(en effet : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\frac{\ln a}{\ln x}} = \frac{1}{\log_x a}$ ).

$I \Leftrightarrow \log_{x-2}(x+4)(x-3) \leq \log_{x-2}\frac{1}{2}\cdot(x-2)^2$

$\Leftrightarrow (x-4)(x-3) \leq \frac{1}{2}(x-2)^2$

car $\log_{x-2}$ (avec $x > 3$) est une bijection $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^*_+$.

$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 28 \leq 0$

$\Leftrightarrow -3 - \sqrt{37} \leq x \leq -3 + \sqrt{37}.$

$S = ]3, -3+\sqrt{37}].$

4.) $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2} \cdot \text{Arctan}\, \frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*_-$.

On pose : $y = \tan\left(\frac{1}{2} \text{Arctan}\, \frac{1}{x}\right) = \tan a < 0$ (car $y < 0$).

avec : $a = \frac{1}{2} \cdot \text{Arctan}\, \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \tan 2a$ et $a \in \left]-\frac{\pi}{4}; 0\right[$.

alors : $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{x} = \dfrac{2y}{1-y^2}$

$\Leftrightarrow \quad y^2 + 2xy - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = -x + \sqrt{1+x^2} > 0$ (à rejeter) ou $y = -x - \sqrt{1+x^2} < 0$

donc sur $\mathbb{R}^*_-$ : $f(x) = -x - \sqrt{1+x^2}$