Examen de fin d'études secondaires
Section [B]. Maths 2 Septembre 2001.

I

a) Inégalité des accroissements finis.

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ $(a<b)$ et supposons que la fct. dérivée a ses valeurs comprises entre m et M sur $]a, b[$, c.-à-d.
$\forall x \in]a, b[$: $m \leq f'(x) \leq M$, alors : $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$.

La fct. $f : x \mapsto \sin x$ est cont. et dér. $\forall x \in \mathbb{R}$ et on a : $(\sin x)' = \cos x$; de plus $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq (\sin x)' = \cos x \leq 1$; appliquons l'inégalité précédente :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$: $$-1 \leq \frac{\sin x - \sin y}{x-y} \leq 1 \iff \left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y}\right| \leq 1$$
$$\iff \frac{|\sin x - \sin y|}{|x-y|} \leq 1 \iff |\sin x - \sin y| \leq |x-y|.$$

II

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = |x| \cdot e^{-|x-1|}$$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq 0 \Rightarrow f$ positive.

a) Tableau :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$	0	x		x
$-\lvert x-1\rvert$	$x-1$		$x-1$	0	$1-x$
$f(x)$	$-x \cdot e^{x-1}$	0	$x \cdot e^{x-1}$	1	$x \cdot e^{1-x}$
$f'(x)$	$-e^{x-1} \cdot (x+1)$	$-\frac{1}{e} \parallel \frac{1}{e}$	$e^{x-1} \cdot (x+1)$	$2 \parallel 0$	$e^{1-x} \cdot (1-x)$

Continuité en $x_0 = 0$

$f(0) = 0$: $\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{x-1} = 0 = f(0)$; $\lim_{x \to 0^-} (-x) \cdot e^{x-1} = 0 = f(0)$

f est continue (à droite et à gauche) en $x_0 = 0$.

Continuité en $x_1 = 1$

$f(1) = 1$: $\lim_{x \to 1^+} x \cdot e^{1-x} = 1 = f(1)$; $\lim_{x \to 1^-} x \cdot e^{x-1} = 1 = f(1)$

f est continue (à droite et à gauche) en $x_1 = 1$.

Dérivabilité en $x_0 = 0$: $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} e^{x-1} = \frac{1}{e} = f'_d(0)$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-e^{x-1}) = -\frac{1}{e} = f'_g(0)$

f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$; O est un point anguleux.

Dérivabilité en $x_1 = 1$: $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x \cdot e^{1-x}-1}{x-1} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(t+1) \cdot e^{-t}-1}{t}$

$= \lim_{t \to 0} \left[e^{-t} + \frac{e^{-t}-1}{t}\right] = \lim_{t \to 0} e^{-t} - \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 - 1 = 0 = f'_d(1)$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x \cdot e^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{t \to 0^-} \frac{(t+1)e^{t}-1}{t}$

$= \lim_{t \to 0^-} \left[e^{t} + \frac{e^{t}-1}{t}\right] = 2 = f'_g(1)$

donc f n'est pas dérivable en $x_1 = 1$; $A(1, 1)$ est un point anguleux.

b.) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} = e\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ A.H. $y=0$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)\cdot e^{x-1} = -\frac{1}{e}\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{x} = -\frac{1}{e}\cdot 0^- = 0^+$ A.H. $y=0$.

* $\text{dom} f' = \mathbb{R}^* - \{1\}$.

$\forall x \in]-\infty,0[\ : \ f'(x) = -[e^{x-1} + x\cdot e^{x-1}] = -e^{x-1}\cdot(x+1)$.

$\forall x \in]0,1[\ : \ f'(x) = e^{x-1} + x\cdot e^{x-1} = e^{x-1}\cdot(x+1) > 0$

$\forall x \in]1,+\infty[\ : \ f'(x) = e^{1-x} + x\cdot e^{1-x}\cdot(-1) = e^{1-x}\cdot(1-x) < 0$

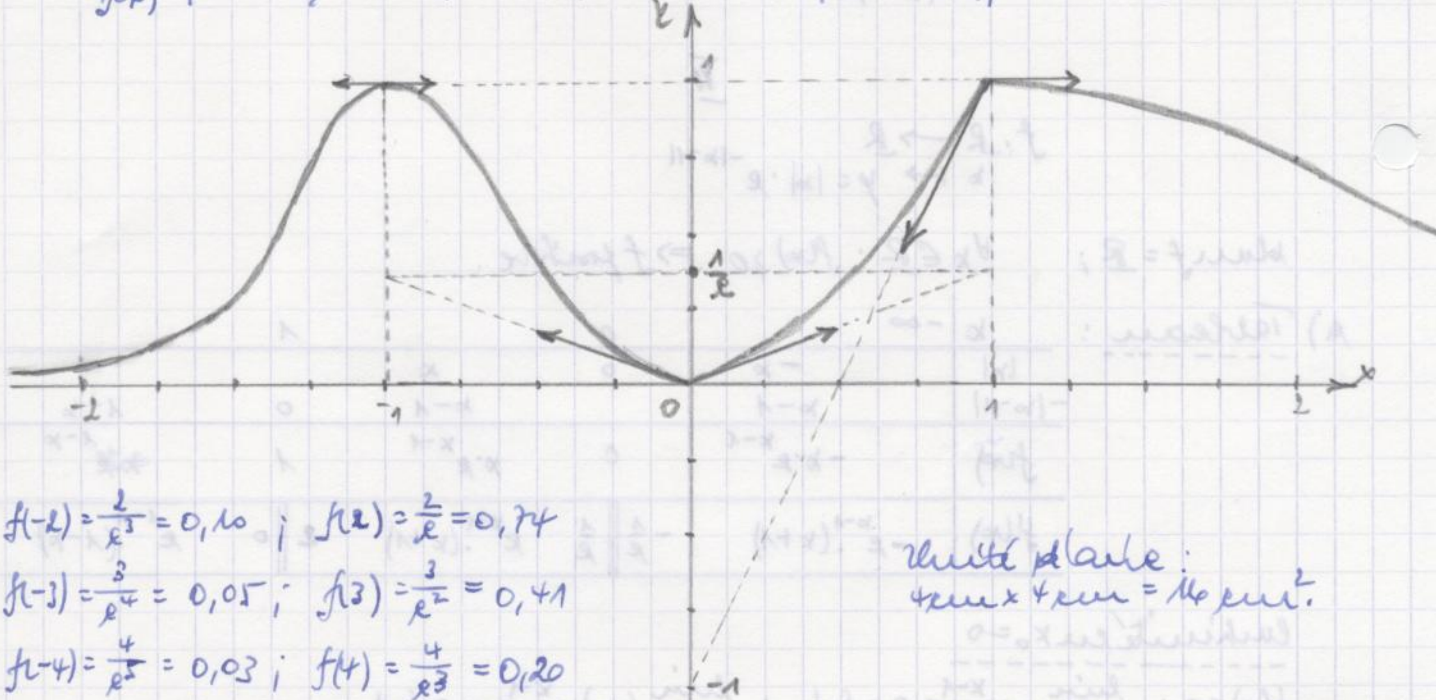
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=-1$ et $f(-1) = 1\cdot e^0 = 1$.

ou $x=1$ à rejeter.

* Tableau de variation.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	$-\frac{1}{e}$ || $\frac{1}{e}$	$+$	2 || 0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0	↗	1	↘	0

c)



$f(-2) = \frac{2}{e^3} = 0,10$; $f(2) = \frac{2}{e} = 0,74$

$f(-3) = \frac{3}{e^4} = 0,05$; $f(3) = \frac{3}{e^2} = 0,41$

$f(-4) = \frac{4}{e^5} = 0,03$; $f(4) = \frac{4}{e^3} = 0,20$

Unité d'aire : $4cm \times 4cm = 16\ cm^2$.

d) $\mathcal{A} = \int_0^2 x\cdot e^{1-x}\,dx = -[x\cdot e^{1-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{1-x}\,dx$ $u(x)=x$ $v'(x)=e^{1-x}$; $u'(x)=1$ $v(x)=-e^{1-x}$

$\mathcal{A} = -(\frac{2}{e}-0) - [e^{1-x}]_0^2 = -\frac{2}{e} - (\frac{1}{e} - e) = (e - \frac{3}{e})$ unités d'aire $= 1{,}61\cdot 16\ cm^2$

$\mathcal{A} = 25{,}83\ cm^2$.

III

$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$\begin{cases} \forall x>0 : f(x) = \dfrac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x + 1} \\ f(0) = 1 \end{cases}$ (C)

a) Étude de la continuité en $x_0 = 0$ (à droite) :

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x + 1} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{t^2-1}{t^2+1} = 1 = f(0)$ $t = \ln x$, $x\to0^+ \Leftrightarrow t\to-\infty$

$\Rightarrow f$ est continue à droite en $x_0 = 0$.

Étude de la dérivabilité (à droite) en $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x + 1} - 1\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \frac{\ln^2 x - 1 - \ln^2 x - 1}{\ln^2 x + 1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{x(\ln^2 x + 1)} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

En effet : $t = \ln x \iff e^t = x$

$$= \lim_{t\to -\infty} \frac{-2}{e^t(t+1)} = -2\cdot \lim_{t\to -\infty} \frac{1}{\underbrace{t\cdot e^t}_{\to 0} + \underbrace{e^t}_{\to 0^+}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$; C admet en $x_0 = 0$ une demi-tangente $\parallel (Oy)$.

b.) * $\forall x > 0$: $f'(x) = \frac{2\cdot \ln x\cdot \frac{1}{x}(1+\ln^2 x) - (\ln^2 x - 1)\cdot 2\ln x\cdot \frac{1}{x}}{(\ln^2 x + 1)^2} = 2\cdot\frac{\frac{1}{x}\ln x(1+\ln^2 x - \ln^2 x + 1)}{(1+\ln^2 x)^2}$

$f'(x) = 4\cdot \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

* $v'(x) = 1\cdot(1+\ln^2 x)^2 + x\cdot 2(1+\ln^2 x)^1\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x} = (1+\ln^2 x)(1+\ln^2 x + 4\ln x)$

$f''(x) = 4\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x\cdot(1+\ln^2 x)^2 - \ln x\cdot(1+\ln^2 x)(1+4\ln x + \ln^2 x)}{x^2(1+\ln^2 x)^4}$

$f''(x) = 4\cdot\frac{(1+\ln^2 x)(1+\ln^2 x - \ln x - 4\ln^2 x - \ln^3 x)}{x^2(1+\ln^2 x)^4} = -4\cdot\frac{\ln^3 x + 3\ln^2 x + \ln x - 1}{x^2\cdot(1+\ln^2 x)^3}$.

* $f''(x) = 0 \iff \ln^3 x + 3\ln^2 x + \ln x - 1 = 0$ $\qquad$ posons $t = \ln x$

$g(t) = t^3 + 3t^2 + t - 1 = 0$ $\qquad$ et $g(-1) = 0$

Schéma de Horner :

	1	3	1	-1
		-1	-2	1
-1	1	2	-1	0

$g(t) = (t+1)(t^2+2t-1) = 0 \iff t = -1$ ou $t^2 + 2t - 1 = 0$ $\qquad \Delta' = 2$

$\Rightarrow t' = -1+\sqrt{2}$ ou $t'' = -1-\sqrt{2}$

$f''(x) = 0 \iff (\ln x + 1)(\ln^2 x + 2\ln x - 1) = 0$

$\iff \ln x = -1$ ou $\ln x = -1+\sqrt{2}$ ou $\ln x = -1-\sqrt{2}$

$\iff x = \frac{1}{e} = 0{,}37$ ou $x = e^{-1+\sqrt{2}} \simeq 1{,}51$ ou $x = e^{-1-\sqrt{2}} \simeq 0{,}09$.

Tableau :

$\ln x$	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$\ln x + 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln^2 x + 2\ln x - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		$e^{-1-\sqrt{2}}$		$\frac{1}{e}$		$e^{-1+\sqrt{2}}$		
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\smile$	0	$\frown$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\smile$	

3 points d'inflexion : $I_1(e^{-1-\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{2})$; $I_2(\frac{1}{e}; 0)$; $I_3(e^{-1+\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

0,09 $\qquad$ 1,51

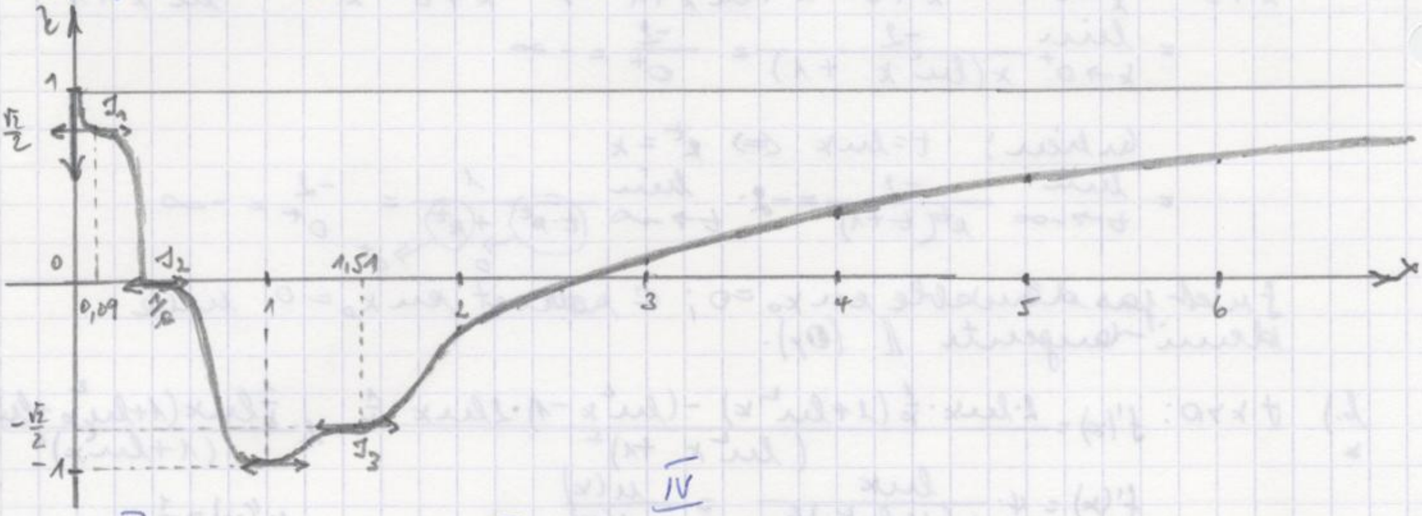
$f(e^{-1\mp\sqrt{2}}) = \frac{(-1\mp\sqrt{2})^2 - 1}{(-1\mp\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{2\pm 2\sqrt{2}}{4\pm 2\sqrt{2}} = \frac{1\pm\sqrt{2}}{2\pm\sqrt{2}}\cdot\frac{2\mp\sqrt{2}}{2\mp\sqrt{2}} = \frac{2\mp\sqrt{2}\pm 2\sqrt{2} - 2}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(\frac{1}{e}) = \frac{(-1)^2 - 1}{(-1)^2 + 1} = \frac{0}{2} = 0$

$f'(x)=0 \iff \ln x = 0 \iff x=1$ et $f(1)=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^2-1}{t^2+1} = 1$ AH $y=1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1



a) $J=\int_0^{\pi/3}\left(\sin 2x - \frac{1}{\cos x}\right)^2 dx = \int_0^{\pi/3}\left(\sin^2 2x - 2\cdot\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$J = \int_0^{\pi/3}\left(\frac{1-\cos 4x}{2} - 4\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{8}\left[\sin 4x\right]_0^{\pi/3} + 4\left[\cos x\right]_0^{\pi/3} + \left[\operatorname{tg} x\right]_0^{\pi/3}$

$J = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt3}{16} - 2 + \sqrt3 = \frac{\pi}{6} + \frac{17}{16}\sqrt3 - 2.$

b.) Les 8 questions peuvent être choisies de $C_{10}^8 = C_{10}^2 = 45$ façons différentes.

- S'il est obligé de répondre aux 3 premières questions, il en choisit encore 5 parmi les 7 restantes : $C_7^5 = C_7^2 = 21$.
- S'il répond aux 5 premières questions, il en choisit encore 3 parmi les 5 restantes : $C_5^3 = C_5^2 = 10$.
- S'il répond à 4 des 5 premières, il choisit ces 4 de $C_5^4 = 5$ façons différentes, et il choisit les 4 autres des 5 dernières de $C_5^4 = 5$ façons différentes ; il répond aux 8 questions de $5\cdot 5 = 25$ façons.

Ainsi il obtient un total de $10 + 25 = 35$ choix.

c) (E) $y'' + 2y' + 10y = 0$

Éq. caractéristique : (E') $r^2 + 2r + 10 = 0 \iff r = -1 \pm 3i$

Sol. générale de (E) : $y = f(x) = e^{-x}\cdot(\lambda_1\cos 3x + \lambda_2 \sin 3x)$.

$f'(x) = e^{-x}\cdot(-\lambda_1 + 3\lambda_2)\cos 3x - e^{-x}\cdot(3\lambda_1 - \lambda_2)\sin 3x$

Cond. initiales : $f(\pi) = -e^{-\pi} \iff -e^{-\pi} = e^{-\pi}\cdot(\lambda_1\cdot 1 + \lambda_2\cdot 0) \iff \lambda_1 = -1$.

$f'(-\frac{\pi}{6}) = e^{\pi/6} \iff e^{\pi/6} = e^{\pi/6}(1+3\lambda_2)\cdot 0 - e^{\pi/6}(-3-\lambda_2)(-1) \iff 4e^{\pi/6} = -\lambda_2\cdot e^{\pi/6} \iff \lambda_2 = -4.$

Solution demandée : $y = f(x) = -e^{-x}\cdot(\cos 3x + 4\sin 3x)$.