Examen de fin d'études secondaires
Section [B] Mathématiques II Septembre 2001.

1. a. Enoncer et démontrer l'inégalité *des accroissements finis.*
Application: Montrer que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$

b. Démontrer le théorème:
Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction numérique continue sur $[a;b]$.

i. Si f est positive sur $[a;b]$, alors: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

ii. Si f est positive sur $[a;b]$ et si $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors $f(x) = 0$ pour tout x de $[a;b]$.

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = |x| \bullet e^{-|x-1|}$

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f. (Etude détaillée en $x = 0$ et en $x = 1$)

b. Etudier la fonction f (limites, asymptotes éventuelles, dérivée, tableau de variation).

c. Construire C_f dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$). (Unité: 4 cm)

d. Déterminer l'aire en cm^2 de la surface comprise entre C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

3. Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x + 1} & si \quad x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

de courbe représentative C dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$)

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$.

b. Montrer que

$$f''(x) = \frac{-4\left(\ln^3 x + 3\ln^2 x + \ln x - 1\right)}{x^2\left(\ln^2 x + 1\right)^3}$$

et déterminer les coordonnées des points d'inflexion de C.

4.

a. Calculer: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \frac{1}{\cos x})^2 dx$

b. A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10.

i. Combien de choix y a-t-il s'il doit répondre aux 3 premières questions?

ii. Combien de choix y a-t-il s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions?

c. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = 0$ qui vérifie les conditi

$$\begin{cases} f(\pi) = -e^{-\pi} \\ f'(-\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{1}{6}\pi} \end{cases}$$

Répartition des points: 13 + 20 + 13 + 14