Examen de fin d'études secondaires.
Section $\boxed{B}$. Maths 2. Juin 2001.

## II

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \frac{e^{1/x}}{x^2}$$

1° $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^*$ : $f$ est cont. et dérivable $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$.

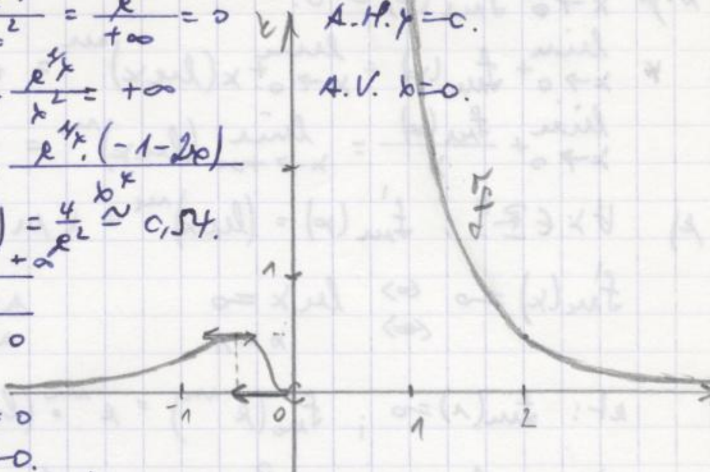
2° $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} = \frac{e^0}{-\infty} = 0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} = \frac{e^0}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \cdot e^{-t} = 0$ ; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{1/x}}{x^2} = +\infty$

3° $\forall x \in \mathbb{R}^*$ : $f'(x) = \frac{x^2 \cdot e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}\cdot 2x}{x^4} = \frac{e^{1/x}\cdot(-1-2x)}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ et $f(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{e^2} \simeq 0{,}54$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1/2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | max. | $\searrow$ | $0 \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $0$ |




4° $\forall x \in \mathbb{R}$ : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0_-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0_-} \frac{e^{1/x}}{x^3} = \lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{1}{\frac{e^t}{t^3}} = 0$

donc $g$ est dérivable à gauche en 0.

5° (demi-tgte horizontale en $x_0 = 0^-$.)

$g(-1) = \frac{1}{e} = 0{,}37$
$g(1) = e$
$g(2) = \frac{1}{4}\cdot e^{1/2} = 0{,}41$.

6° $m \in ]0,1[$ : $A(m) = \int_m^1 g(x)\,dx = \int_m^1 e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = \left[-e^{1/x}\right]_m^1 = -e + e^{1/m}$

$m = 1$ : $A(1) = 0$.

$m > 1$ : $A(m) = \int_1^m g(x)\,dx = e - e^{1/m}$ (unités d'aire).

$\lim\limits_{m\to+\infty} A(m) = \lim\limits_{m\to+\infty} (e - e^{1/m}) = e$ (unités d'aire).

## III

$f_m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$\begin{cases} \forall x > 0 : & f_m(x) = x(\ln x)^m \\ & f_m(0) = 0 \end{cases}$ $(m \in \mathbb{N}^*)$

1° $\begin{cases} f_1(x) = x\ln x & (x > 0) \\ f_1(0) = 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to0^+} f_1(x) = 0 = f_1(0) \to f_1$ cont. (à droite) en $x_0 = 0$.

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x\cdot\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ : $f_1$ n'est pas dér. (à droite) en $x_0 = 0$.

b.) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x\cdot\ln x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x) = +\infty$ : $C_f$ admet une branche parabolique de dir. asymptotique $(Oy)$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ : $f_1'(x) = 1 + \ln x$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \simeq 0{,}37$ ; $f(1/e) = -\frac{1}{e} = -0{,}37$.

| $x$ | $0$ | | $1/e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_1(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1/e$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2° $\begin{cases} f_n(x) = x\cdot(\ln x)^n \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

a) * $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^{1/n}\cdot \ln x\right)^n = 0 = f_n(0)$ : $f_n$ est cont. à droite en 0.

* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\cdot(\ln x)^n}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ impair.} \end{cases}$

$\Rightarrow f_n$ n'est pas dérivable à droite en 0.

b) * $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$.

* $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^n = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^n = +\infty$ : B.P. de D.A. (Oy).

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ : $f'_n(x) = (\ln x)^n + x\cdot n\cdot(\ln x)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{x} = (\ln x)^{n-1}\cdot(\ln x + n)$.

$f'_n(x) = 0 \iff \ln x = 0$ ou $\ln x = -n$
$\iff x = 1$ ou $x = \dfrac{1}{e^n} < 1$

et : $f_n(1) = 0$ ; $f_n(e^{-n}) = e^{-n}\cdot(\ln e^{-n})^n = \left(-\dfrac{n}{e}\right)^n$

• si $n$ est pair alors $n-1$ est impair :

| $x$ | $0$ | | $e^{-n}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(\ln x)^{n-1}$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\ln x + n$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'_n(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{-n^n}{e^n}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

• si $n$ est impair alors $n-1$ est pair

| $x$ | $0$ | | $e^{-n}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(\ln x)^{n-1}$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $\ln x + n$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'_n(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $\dfrac{-n^n}{e^n}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3° $\begin{cases} f_1(x) = x\ln x \\ f_1(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} f_2(x) = x(\ln x)^2 \\ f_2(0) = 0 \end{cases}$

O(0,0) est un point commun.

$\forall x > 0$, posons : $f_1(x) = f_2(x) \iff x\ln x = x\cdot(\ln x)^2$
$\iff x\ln x(1 - \ln x) = 0$
$\iff x = 1$ ou $x = e$

$f_1(1) = 0 \Rightarrow A(1,0)$
$f_1(e) = e \Rightarrow B(e,e)$ } sont les 2 autres points communs.

4° $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x\cdot(\ln x)^{n+1} - x(\ln x)^n$ avec $x > 1$
$= \underbrace{x}_{>0}\cdot\underbrace{(\ln x)^n}_{>0}\cdot(\ln x - 1)$

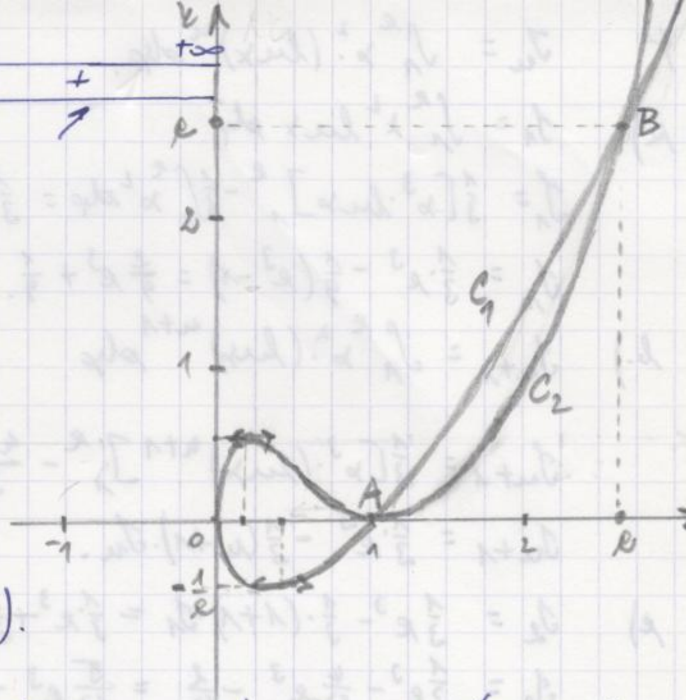
$1 < x < e$ : $\ln x - 1 < 0 \Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0 \Rightarrow C_n / C_{n+1}$

$x = e$ : $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ : $C_{n+1}$ et $C_n$ se coupent.

$x > e$ : $\ln x - 1 > 0 \Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0 \Rightarrow C_{n+1} / C_n$.

5°

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}=0{,}14$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_2(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_2(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{e^2}=0{,}54$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |




IV

1° $e^x + \frac{1}{e^x} = 2m \quad (m \in \mathbb{R})$.

Existence : $x \in \mathbb{R}$

Résolution : Comme $e^x > 0 \Rightarrow e^x + \frac{1}{e^x} > 0$ ; on n'a pas de résolution si $m \leq 0$ : $S = \emptyset$.

Si $m > 0$ alors posons $e^x = t > 0$ ; on obtient :

$t + \frac{1}{t} = 2m \Leftrightarrow t^2 - 2mt + 1 = 0 \qquad \Delta' = m^2 - 1$

| $m$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$0 < m < 1$ : $\Delta' < 0$ pas de solution : $S = \emptyset$.

$m = 1$ : $\Delta' = 0$ solution double : $t_1 = t_2 = 1$
$\Rightarrow e^x = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad S = \{0\}$.

$m > 1$ : $\Delta' > 0$ deux solutions distinctes.
$t_1 = m + \sqrt{m^2-1} > 0 \Rightarrow x_1 = \ln(m + \sqrt{m^2-1})$
$t_2 = m - \sqrt{m^2-1} > 0 \Rightarrow x_2 = \ln(m - \sqrt{m^2-1})$
$S = \{\ln(m - \sqrt{m^2-1}) \,;\, \ln(m + \sqrt{m^2-1})\}$

2° (E) $y'' + 2y' + 5y = 0$
(C) $r^2 + 2r + 5 = 0 \qquad \Delta' = -4 < 0 \qquad r = -1 \pm 2i$

$f_{\lambda,\mu}(x) = e^{-x}\cdot(\lambda\cos 2x + \mu\cdot\sin 2x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Conditions initiales :
- $f(0) = 0 \Leftrightarrow 1(\lambda + 0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.
  donc $f_\mu(x) = \mu\cdot e^{-x}\cdot\sin 2x$
- $f'_\mu(x) = -\mu\cdot e^{-x}\cdot\sin 2x + 2\mu\cdot e^{-x}\cdot\cos 2x$
  $f'_\mu(0) = 1 \Leftrightarrow 0 + 2\mu = 1 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}$.

Solution particulière cherchée : $f : x \mapsto y = f(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{-x}\cdot\sin 2x$.

3° a) Nbre de cas possibles : $6^3 = 216$.
b) $3\cdot 5^2 = 3\cdot 25 = 75$
c) $C_3^2\cdot 5 = 3\cdot 5 = 15$
d) $5^3 = 125$
e) $1$

4° $I_n = \int_1^e x^2 \cdot (\ln x)^n \, dx$. avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx$ $\quad u(x) = \ln x \quad v'(x) = x^2$
$\quad u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = \frac{1}{3}x^3$.

$I_1 = \frac{1}{3}[x^3 \cdot \ln x]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \frac{1}{3}e^3 - 0 - \frac{1}{9}[x^3]_1^e$

$I_1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$.

b.) $I_{n+1} = \int_1^e x^2 \cdot (\ln x)^{n+1} dx$ $\quad u(x) = (\ln x)^{n+1} \quad v'(x) = x^2$
$\quad u'(x) = (n+1)(\ln x)^n \cdot \frac{1}{x} \quad v(x) = \frac{1}{3}x^3$

$I_{n+1} = \frac{1}{3}[x^3 \cdot (\ln x)^{n+1}]_1^e - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2 \cdot (\ln x)^n dx$

$I_{n+1} = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}(n+1) \cdot I_n$.

c) $I_2 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} \cdot (1+1) \cdot I_1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9} \cdot e^3 + \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{27}(2e^3 + 1)$

$I_2 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{4}{27}e^3 - \frac{2}{27} = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$.