Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2001

Section: B

Juin

Branche: Mathématiques II

Nom et prénom du candidat

____

____

I) 1) Démontrer : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$ avec $\alpha > 0$

2) démontrer : a) pour tout a, b dans $\mathbb{R}$: $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$

b) pour tout a dans $\mathbb{R}$: $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp a}$

3) soient deux réels a et b tels que a<b

démontrer: si f est une fonction continue positive sur $[a;b]$

alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

II) soit la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

1) domaine de définition, de continuité et de dérivabilité
2) limites et comportement asymptotique
3) dérivée et tableau de variation
4) définir le prolongement par continuité g de f à gauche au point 0 ; étudier la dérivabilité de g à gauche au point 0 ; en déduire l'existence d'une demi-tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative C de g
5) tracer la courbe C dans un repère orthonormé (unité : 2cm) indiquer la demi-tangente au point d'abscisse 0
6) calculer l'aire A(m) de la partie du plan déterminée par la courbe C, par l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = m$ avec $m \in \mathbb{R}_+^*$
   calculer $\lim\limits_{m \to +\infty} A(m)$

III) soit la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$\begin{cases} f_m(x) = x(\ln x)^m & \text{si } x > 0 \\ f_m(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{avec } m \in \mathbb{N}^*$$

soit C_m la courbe représentative de f_m

1) étude de f_1 : a) continuité et dérivabilité en 0

b) limites et comportement asymptotique

c) dérivée et tableau de variation

$\Longrightarrow$

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2001	Nom et prénom du candidat
Section: B Juin	
Branche: Mathématiques II	

2) étude de f_m pour m>1 : (distinguer m pair et m impair)
   a) continuité et dérivabilité en 0
   b) limites et comportement asymptotique
   c) dérivée et tableaux de variation

3) montrer que les courbes C_1 et C_2 ont trois points communs dont on détermine les coordonnées

4) étudier la position relative de C_m et C_{m+1} sur l'intervalle $]1;+\infty[$

5) construire C_1 et C_2 dans un même repère orthonormé (unité: 2cm)

IV) 1) résoudre et discuter l'équation

$$e^x + \frac{1}{e^x} = 2m \qquad \text{avec m paramètre réel}$$

2) soit l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$
déterminer la solution f dont la courbe représentative dans un repère orthonormé passe par l'origine et qui admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1

3) on jette trois dés cubiques de couleurs différentes; combien y a-t-il:
   a) de résultats possibles
   b) de résultats comportant un seul 4
   c) de résultats comportant exactement deux 4
   d) de résultats ne comportant aucun 6
   e) de résultats comportant trois 5

4) soit $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
   a) calculer I_1
   b) calculer I_{n+1} en fontion de I_n
   c) en déduire I_2

répartition des points : 12 ;14 ;18 ;16

Francis Scholtes
LMRL