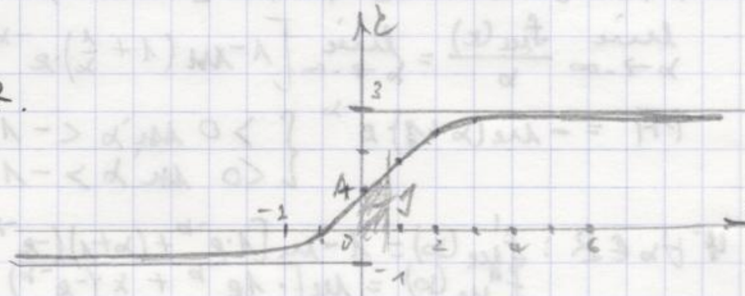
Examen de fin d'études secondaires
Section [B]. Maths 2. Juin 2000.

II



1° $f: x \mapsto y = \dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$ $\quad$ dom $f = \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
  A.H $y=3$ et A.H $y=-1$.
- $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x) = \dfrac{3e^x(e^x+1)-(3e^x-1)\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$

  $f'(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2} > 0$
- $\forall x\in\mathbb{R}: f''(x) = 4\cdot\dfrac{e^x(e^x+1)^2 - e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4} = \dfrac{4\cdot(e^x+1)\cdot e^x(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4} = \dfrac{4\cdot e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$.

  $f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x=0$ et $f(0)=1$; $A(0,1)$ est le seul p^t d'inflexion de Γ_f car en $x_0=0$, $f''(x)$ s'annule et change de signe.
- éq. de la tangente en A : $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x+1$.
-

x	1	2	3	-1
$f(x)$	$\frac{3e-1}{e+1}\simeq 1{,}9$	$\frac{3e^2-1}{e^2+1}\simeq 2{,}6$	$\frac{3e^3-1}{e^3+1}\simeq 2{,}8$	$\simeq 0{,}08$

2° $g: x\mapsto y = \dfrac{2e^{2x}+3e^x-3}{e^x+1}$

- $g(x) = a\cdot e^x + b + \dfrac{c\,e^x}{e^x+1} = \dfrac{(a\cdot e^x+b)(e^x+1)+c\cdot e^x}{e^x+1} = \dfrac{a\cdot e^{2x}+(a+b+c)\cdot e^x + b}{e^x+1}$

  $\forall x\in\mathbb{R}$ donc: $\begin{cases} a = 2 \\ a+b+c = 3 \\ -b = 3\end{cases} \Leftrightarrow a=2 ; b=-3 ; c=4$.

  c.-à-d. $\forall x\in\mathbb{R}$: $g(x) = 2\cdot e^x - 3 + \dfrac{4e^x}{e^x+1}$
- $J = \int_0^{\ln 2} dx = \int_0^{\ln 2}\left(2\cdot e^x - 3 + 4\cdot\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)\cdot dx = \left[2e^x - 3\cdot x + 4\cdot\ln(e^x+1)\right]_0^{\ln 2}$

  $J = 4 - 3\cdot\ln 2 + 4\cdot\ln 3 - 2 - 4\cdot\ln 2 = 2 - 7\ln 2 + 4\ln 3$.
- $I - J = \int_0^{\ln 2}[f(x)-g(x)]\,dx = \int_0^{\ln 2}\dfrac{3e^x-1-2e^{2x}-3e^x+3}{e^x+1}\,dx = \int_0^{\ln 2}\dfrac{2-2\cdot e^{2x}}{e^x+1}\cdot dx$

  $I - J = 2\cdot\int_0^{\ln 2}\dfrac{(1-e^x)(1+e^x)}{1+e^x}\,dx = 2\cdot\int_0^{\ln 2}(1-e^x)\,dx = 2\left[x - e^x\right]_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 2$
- $\begin{cases} I - J = 2\ln 2 - 2 \\ J = 4\ln 3 - 7\ln 2 + 2\end{cases} \Rightarrow I = 4\ln 3 - 5\ln 2$

I est l'aire de la partie du plan délimitée par Γ_f, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 2$.

III

$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto y = f_m(x) = x - m(x+1)\cdot e^x$ $\quad (m\in\mathbb{R}_+^*)$

dom $f_m = \mathbb{R}$.

1° $I(x,y)$ est point commun de C_m
$\Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}$: $y = x - (x+1)\cdot e^x m$
$\Leftrightarrow y - x + m(x+1)\cdot e^x = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -1\end{cases}$ $\quad$ d'où un seul point commun $I(-1;-1)$.

2° $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left[1 - m\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}\right] = -\infty\left[1-(+\infty)\right] = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$.

3° $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f_m(x)-x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-m(x+1)\cdot e^{-x}\right] = 0$; A.O. $y=x$ lorsque $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-m\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-x}\right] = -\infty$. B.P. de dir. (Oy) si $x\to-\infty$.

$\overline{PM} = -m(x+1)\cdot e^{-x}$ $\begin{cases} >0 \text{ si } x<-1 & : C_m \text{ au-dessus de A.O.} \\ <0 \text{ si } x>-1 & : C_m \text{ en-dessous de A.O.} \end{cases}$

4° $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'_m(x) = 1 - m\left[1\cdot e^{-x} + (x+1)(-e^{-x})\right] = 1 + m\cdot x\cdot e^{-x}$
$f''_m(x) = m\left[1e^{-x} + x\cdot(-e^{-x})\right] = m(1-x)\cdot e^{-x}$.

5° $f''_m(x) = 0 \iff x=1$ et $f'_m(1) = 1+\frac{m}{e}$.

Or : $1+\frac{m}{e} > 0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'_m(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_m(x) = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''_m(x)$		$+$	0	$-$	
$f'_m(x)$	$-\infty$	↗	$1+\frac{m}{e}$	↘	1

Donc : $f'_m(x)$ s'annule une seule fois et cela dans l'intervalle $]-\infty;1]$

6° De ce qui précède $f'_m(x) = 0$ pour une seule valeur $x_m \in]-\infty,1[$ et f'_m change de signe de signe lorsque x traverse x_m.

x	$-\infty$		x_m		1		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	$1+\frac{m}{e}$	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	min	↗		↗	$+\infty$

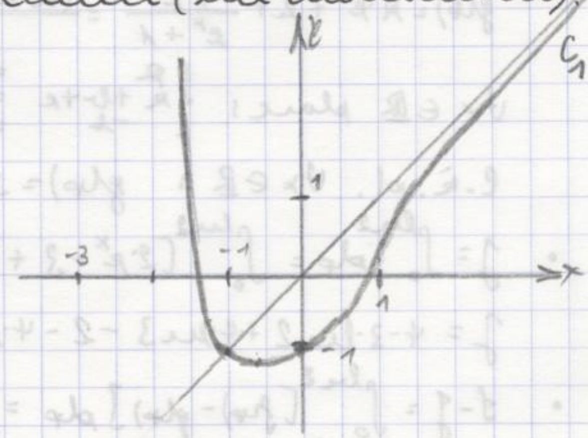
f_m admet donc un et un seul extrémum (un minimum).

7° $y = f_1(x) = x-(x+1)\cdot e^{-x}$
$f'_1(x) = 1 + x\cdot e^{-x}$

$x_1 \in]-1,0[$ car $f'_1(0) > 0$ et $f'_1(-1) < 0$
$f'_1(-\frac{1}{2}) > 0$ et $f'_1(-0,6) < 0$

c.à.d. $x_1 \in]-0,6;\ -0,5[$.

$f_1(-0,5) \simeq f_1(-0,6) \simeq -1,3$.



x	0	1	-1	-2	-3
$f_1(x)$	-1	$1-\frac{2}{e}\simeq 0,26$	-1	$e^2-2\simeq 5,39$	$2e^3-3\simeq 37,17$

8° $a = \int_{-1}^{1}\left[x - f_1(x)\right]dx = \int_{-1}^{1}(x+1)\cdot e^{-x}dx$ $u(x) = x+1$ $v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 1$ $v(x) = -e^{-x}$

$a = -(x+1)\cdot e^{-x}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x}dx$

$a = -(x+1)\cdot e^{-x}\Big|_{-1}^{1} - e^{-x}\Big|_{-1}^{1} = -\left[(x+2)\cdot e^{-x}\right]_{-1}^{1} = -\frac{3}{e} + e \simeq 1,6$ unités d'aire.

IV

1° $2y'' - 5y' - 3y = 0.$

Équation caractéristique : $2r^2 - 5r - 3 = 0$ $\Delta = 25 + 24 = 7^2$.

D'où : $r_1 = 3$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.

Solution générale : $f_{\lambda,\mu}(x) = \lambda \cdot e^{3x} + \mu \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$. $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

$f'_{\lambda,\mu}(x) = 3\lambda \cdot e^{3x} - \frac{1}{2}\mu \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

Conditions initiales : $f(0) = 1 \iff \lambda + \mu = 1.$

$f'(0) = -11 \iff 3\lambda - \frac{1}{2}\mu = -11.$

Système : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 6\lambda - \mu = -22 \end{cases} \iff \lambda = -3$ et $\mu = 4$.

Solution : $y = f(x) = -3 \cdot e^{3x} + 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

2° $e^{4x+4} - e^{3x+3} - 9 \cdot e^{2x+2} - 11 \cdot e^{x+1} - 4 \leq 0.$ L'inéquation existe $\forall x \in \mathbb{R}$

Ch^t de variable : $t = e^{x+1} > 0$.

L'inéquation s'écrit : $P(t) = t^4 - t^3 - 9t^2 - 11t - 4 \leq 0$

Or : $P(-1) = 0$; donc $P(t)$ est divisible par $t + 1$.

On obtient : $P(t) = (t+1)(\underbrace{t^3 - 2t^2 - 7t - 4}_{\text{divisible par } t+1 \text{ de nouveau.}})$

Finalement : $P(t) = (t+1)^3(t-4)$.

L'inéquation de départ est équivalente à :

$$(e^{x+1} + 1)^3 \cdot (e^{x+1} - 4) \leq 0.$$

Donc équivalente à : $e^{x+1} - 4 \leq 0$

$e^{x+1} \leq 4$

$x + 1 \leq 2\ln 2$

Finalement : $x \leq 2\ln 2 - 1$

Solution : $S =]-\infty ; 2\ln 2 - 1]$.

3° $f(x) = x^3 \cdot \cos(\ln x)$.

Valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1, 2]$:

$\mu = \frac{1}{2-1}\int_1^2 x^3 \cos(\ln x)\, dx = \int_1^2 x^3 \cos(\ln x)\, dx$

$u(x) = \cos(\ln x)$ $v'(x) = x^3$

$u'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \sin(\ln x)$ $v(x) = \frac{1}{4}x^4$.

$\mu = \frac{1}{4}[x^4 \cos(\ln x)]_1^2 + \underbrace{\frac{1}{4}\int_1^2 x^3 \sin(\ln x)\, dx}_{J}$

$u(x) = \sin(\ln x)$ $v'(x) = x^3$

$u'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos(\ln x)$ $v(x) = \frac{1}{4}x^4$.

$I = \frac{1}{4}\left[x^4 \sin(\ln x)\right]_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 \cos(\ln x)\,dx$

Donc, en remplaçant : $\mu = \frac{1}{4}\left[x^4 \cos(\ln x) + \frac{1}{4}x^4 \sin(\ln x)\right]_1^2 - \frac{1}{16}\mu$.

c.-à-d. : $\frac{17}{16}\mu = \frac{16}{4}\cos\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{16}{16}\sin\ln 2 - 0$

$\frac{17}{16}\mu = 4\cos(\ln 2) - \frac{1}{4} + \sin\ln 2$

$\mu = \frac{64}{17}\cos(\ln 2) - \frac{4}{17} + \frac{16}{17}\sin(\ln 2)$.