Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2000		Nom et prénom du candidat:
Section:	B Juin	....
Branche:	Mathématiques II	....

I. 1) *Démontrer* : $\lim_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1.$

2) *Démontrer que la dérivée de la fonction* exp *est la fonction* exp .

3) *Démontrer* : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$

4) *Enoncer et démontrer le théorème relatif à l'intégration par parties.*

(2+4+3+3 = 12 points)

II. *On donne les fonctions f et g définies par*

$$f(x) = \frac{3e^x-1}{e^x+1} \quad et \quad g(x) = \frac{2e^{2x}+3e^x-3}{e^x+1}.$$

1. *Etudier la fonction f* :
   a) *asymptotes*
   b) *dérivée et tableau des variations*
   c) *point d'inflexion et concavité*
   d) *équation de la tangente au point d'abscisse* 0
   e) *représentation graphique dans un repère orthonormal.*

2. *On pose* $I = \int_0^{\ln 2} f(x)dx$ *et* $J = \int_0^{\ln 2} g(x)dx.$

   a) *Trouver les réels a, b et c tels que* $g(x) = ae^x + b + \dfrac{ce^x}{e^x+1}$ *et calculer J.*
   b) *Calculer* $I - J$ *en utilisant la linéarité des intégrales.*
   c) *Déduire I de a) et b) et en donner une interprétation graphique.*

(8+7=15 points)

III. *Soit m un paramètre réel* ***strictement positif****.*
On donne la fonction f_m *définie par* $f_m(x) = x - m(x+1)e^{-x}$.
C_m *désigne la courbe représentative de* f_m *dans un repère orthonormal.*

1) *Montrer que les courbes* C_m *admettent un point fixe.*
2) *Calculer les* lim*ites de* f_m *aux bords du domaine de définition.*
3) *Montrer que les courbes* C_m *admettent une même asymptote oblique.*
   Etudier la position de C_m *par rapport à cette asymptote oblique.*
4) *Calculer* $f'_m(x)$ *et* $f''_m(x)$.
5) *Faire le tableau des variations de* f'_m.
   En déduire le nombre des solutions de l'équation $f'_m(x) = 0$.
6) *Montrer que toutes les fonctions* f_m *admettent un extremum.*
   Faire le tableau des variations de f_m.
   (*On désignera par* x_m *le réel auquel* f_m *admet un extremum.*)
7) *Construire la courbe* C_1.
   (*On donnera une valeur approchée de* x_1 *à* $0,1$ *près.*)
8) *Calculer l'aire de la partie du plan définie par* C_1 *et les droites d'équation* $y = x$, $x = -1$ *et* $x = 1$.

(2+1+2+2+3+2+3+3 = 18 points)

IV. 1) *Résoudre l'équation différentielle :* $2y'' - 5y' - 3y = 0$,
   puis chercher la solution vérifiant $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = -11$.

2) *Résoudre l'inéquation :* $e^{4x+4} - e^{3x+3} - 9e^{2x+2} - 11e^{x+1} - 4 \leq 0$.

3) *On donne la fonction f définie sur* IR_+^* *par* $f(x) = x^3 \cos(\ln x)$.
   Calculer la valeur moyenne de f sur $[1;2]$.

(5+5+5 = 15 points)