Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2013

Sections: C et D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

____

Question I **(3+(4+5)+(1+2+3) = 18 points)**

1) Soit a un réel strictement positif et distinct de 1.
   Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$ et $\forall r \in \mathbb{R}$, on a $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a) $\dfrac{e^{2x} + 2e^x}{10e^{-x} - 1} = e^x$
   b) $\log_{25}(2) - \log_{\frac{1}{5}}(x-1) \geq \log_5(x+2)$

3) Calculer les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^{-x+1} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(-x)$
   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{7}\right)^x \cdot \ln(x+1)$
   c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)^{-x}$

Question II **(4+3+2+2+6+2 = 19 points)**

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{2x}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f, calculer les limites aux bornes de ce domaine et étudier l'existence d'asymptotes.
2) Calculer la dérivée première de f et établir son tableau des variations.
3) Déterminer les abscisses des points d'inflexion éventuels du graphe cartésien de f.
4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du graphe cartésien de f avec les axes.
5) Soit un réel $\lambda < -1$. Calculer l'aire A_λ de la partie S du plan délimitée par le graphe cartésien de f, l'axe des x et les deux droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = -1$. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A_\lambda$.
6) Etablir l'équation de la tangente au graphe cartésien de f au point d'abscisse 1.

⟹

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2013

Sections: C et D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Question III **(5+(4+3)+(2+4)+5 = 23 points)**

1) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et que sa dérivée est f.

2) Calculer les intégrales suivantes :

a) $I_1 = \int_{-2}^{-1} \frac{x + \ln(-x)}{x^3}\,dx$

b) $I_2 = \int \sin^3(2x) \cdot \cos(2x)\,dx$

3) On considère la fonction f définie sur $dom_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 9}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in dom_f$, on a $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{c}{x-1}$.

b) Déterminer la primitive F de f sur un intervalle I à préciser telle que $F(0) = 0$.

4) Calculer le volume V du solide engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface délimitée par la courbe d'équation $y = x^2 - 5$ et la droite d'équation $y = 2x - 5$.