Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2010

Sections : C, D

Branche : mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

______________ ______________

I. 1) Démontrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$: $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

2) Calculer (avec justifications) les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{3x+1}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $e^x < e^{-x} - 2$

b) $\log_2 \sqrt{2x+1} \leqslant \log_4 (5x-2) - \log_2 x$

$(3 + 5 + 7 = 15$ points$)$

II. Soit $f(x) = \dfrac{2x+2}{e^{\frac{x}{2}}}$

1) Etudier la fonction f selon le plan suivant.

2 a) domaine ; limites aux bornes du domaine ; asymptotes éventuelles ;

4 b) dérivée et dérivée seconde ; tableau des variations et concavités;

2 c) graphe cartésien G_f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm ;

2 d) équation de la tangente T à G_f en le point d'abscisse 3 ; tracer T.

2) Soit $\lambda \in \left]-1; +\infty\right[$. Calculer en cm^2 l'aire $A(\lambda)$ de la surface délimitée par G_f, l'axe des x et la droite d'équation $x = \lambda$, puis calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

$((2 + 4 + 2 + 2) + 4 = 14$ points$)$

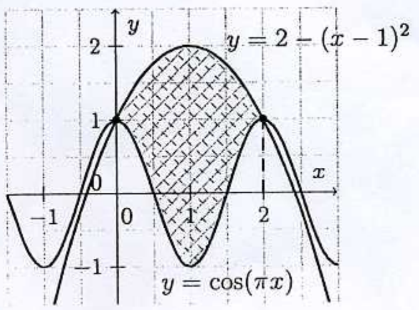
III. 1) a) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$: $\dfrac{1}{x(x^2-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$.

b) Chercher une primitive F de $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$ sur $\left]1; +\infty\right[$.

c) Calculer $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x \ln x}{(x^2-1)^2} dx$.

2) Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos^2 x \sin x + 4 \sin^2 x \right) dx$

3) Avec les indications de la figure, calculer l'aire de la surface hachurée.



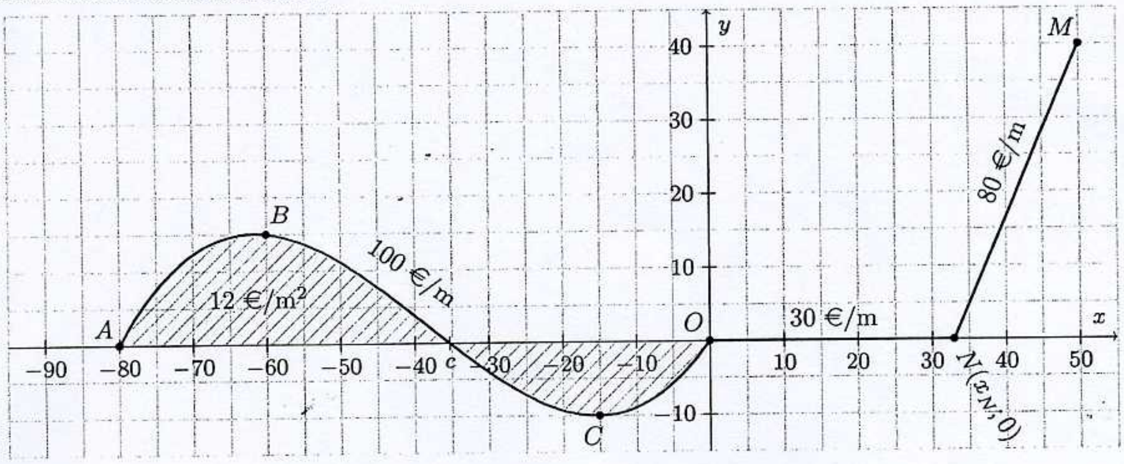
$(8 + 5 + 3 = 16$ points$)$

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2010 **Sections :** C, D **Branche :** mathématiques II	Numéro d'ordre du candidat __________ __________

IV. **Problème**

Une conduite d'eau doit être construite du point $A(-80;0)$ jusqu'au point $M(50;40)$ en passant par les points $B(-60;15)$, $C(-15;-10)$, $O(0;0)$ et $N(x_N;0)$ avec $0 < x_N < 50$. Voir le plan ci-dessous, où l'unité est le mètre et un repère orthonormé est introduit.



1) La courbe entre A et O doit obligatoirement suivre le graphe d'une fonction-polynôme du troisième degré, notée $P(x)$. Déterminer (avec justifications) les constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $P(x) = x(x+80)(ax+b)$ ainsi que la troisième racine de P, notée c.

2) [Si on n'a pas réussi à trouver les valeurs exactes de a et b, on peut continuer avec les valeurs approchées $a \approx 5 \cdot 10^{-4}$ et $b \approx 1{,}8 \cdot 10^{-2}$]
Calculer le coût C_1 de la construction de la conduite d'eau entre A et O, sachant que sa pose coûte ici 100€ par mètre courant, et que la reconfection du gazon (aires hachurées) coûte 12€ par m^2. Il est conseillé de passer en MODE APPROXIMATE pour abréger le calcul de certaines intégrales.

3) Exprimer la distance de N à M en fonction de x_N.

4) En notant $x_N = x$ et en utilisant les indications des prix de la figure, déterminer l'expression analytique de la fonction $C_2(x)$ qui calcule le coût total de la conduite d'eau entre O et M.

5) Déterminer (avec justifications) la valeur de x_N qui minimise C_2. Elle est fixée dans la suite.

6) En B, C et M sont situées des maisons dont les propriétaires doivent contribuer à parts égales au coût total de la conduite d'eau. Combien doit payer chacun ?

$(3+7+1+3+1 = 15$ points$)$

- **Remarques et rappels :**
  - B et C ne représentent *pas* forcément des extremums pour P.
  - Si une fonction f est dérivable sur un intervalle $[a;b]$, alors la longueur ℓ de la partie de son graphe G_f allant de $P_0(x_0; f(x_0))$ à $P_1(x_1; f(x_1))$ est donnée par la formule
$$\ell = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$
  - Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse égale la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.