

## Epreuve écrite

**Examen de fin d'études secondaires 2009**

**Section: CD**

**Branche: Mathématiques II**

Numéro d'ordre du candidat

\_\_\_\_\_

- I) Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x}$  et  $C_f$  la courbe représentative de  $f$ .
- Faire l'étude de  $f$ : domaine de définition, limites et asymptotes, dérivée et tableau de variation, points d'inflexion, points d'intersection de  $C_f$  avec les axes de coordonnées.
  - Etablir une équation des tangentes à  $C_f$  aux points d'inflexion.
  - Tracer  $C_f$  et les tangentes trouvées en b) dans un repère orthonormé d'unité 1cm.
  - Calculer l'aire  $A(\lambda)$  de la surface délimitée par la courbe  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -\frac{5}{2}$  et  $x = \lambda$  ( $\lambda > -2$ ). Trouver  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ .

6+1+2+5=14 points

- II) Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x + \ln(1+x)^2$  et  $C_f$  la courbe représentative de  $f$ .
- Faire l'étude de  $f$ : domaine de définition, limites et asymptotes, dérivée et tableau de variation, concavité de la courbe.
  - Tracer  $C_f$  dans un repère orthonormé d'unité 1cm.
  - Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe  $C_f$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = e - 1$ .

7+2+5=14 points

III) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-1}$ .

b) Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cdot \sin^2 x \, dx$ .

c) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :  $\ln(2x+1) - \ln 3 - \ln \sqrt{3-2x} \leq 0$

d) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $40e^{-x} + 2 + e^{2x} = 7e^x$

2+3+6+6=17 points

## Epreuve écrite

**Examen de fin d'études secondaires 2009**

**Sections: C et D**

**Branche: Mathématiques II**

**Numéro d'ordre du candidat**

\_\_\_\_\_

### Problème : La multiplication des drosophiles

La **drosophile** (du latin *droso* : la rosée et *philus* : qui aime) est un insecte appelé mouche du vinaigre ou *mouche des fruits*. La drosophile se reconnaît à son corps brun, d'un à deux millimètres. On trouve des drosophiles presque partout sur Terre. Souvent visibles toute l'année, elles sont parfois très communes, voire importunes (dans les fabriques de jus de fruits ou de confitures, elles peuvent tomber dans les récipients et transmettre des micro-organismes). Elles sont attirées par les fruits, où elles pondent leurs œufs et où leurs larves se développent.



Elle doit sa célébrité à sa facilité d'élevage, qui en a fait une espèce modèle dans la recherche en génétique.

Au début des mesures (jour 0) la population est de 200 drosophiles. Le lendemain on compte déjà 240 drosophiles.

1) On suppose que la multiplication des drosophiles suit la loi d'une croissance exponentielle :  $f(t) = \alpha \cdot e^{\beta t}$ , où  $t$  désigne le temps écoulé en jours et  $f(t)$  la population au jour  $t$ .

Déterminer les paramètres réels  $\alpha$  et  $\beta$ . Donner une valeur de  $\beta$  à  $10^{-3}$  près.

2) A partir de quel jour la population dépasse-t-elle les 3000 drosophiles ?

3) Représenter graphiquement la fonction  $f$  dans un repère bien choisi.

4) Vu que l'espace de vie, ainsi que la quantité de nourriture sont limités, on admet que la population atteindra au plus les 3500 drosophiles. Juger de la qualité du modèle exponentiel.

5) On admettra que la multiplication des drosophiles est plutôt caractérisée par une fonction du type

croissance logistique :  $g(t) = \frac{A}{1 + B \cdot e^{-k \cdot t}}$ , où  $A$ ,  $B$  et  $k$  sont des paramètres réels et  $k > 0$ .

Sachant que  $g$  vérifie les mêmes conditions initiales que  $f$ , utiliser les données de 4) pour déterminer les valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $k$ . Donner une valeur de  $k$  à  $10^{-4}$  près.

Si vous ne trouvez pas l'expression, vous pouvez continuer avec  $g(t) = \frac{3500}{1 + 16,5 \cdot e^{-0,1945t}}$ .

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2009

Sections: C et D

Branche: **Mathématiques II**

Numéro d'ordre du candidat

---

*Désormais on se limitera au modèle de la croissance logistique.*

- 6) Représenter graphiquement la fonction  $g$  dans le repère sous 3).
- 7) A partir de quel jour la population dépasse-t-elle les 3000 drosophiles ?
- 8) Quand l'accroissement de la population est-il maximal ? Expliquer le raisonnement à l'aide d'un tableau de variations.

(15 points)