Corrigé : Mathématiques II (C, D)

Question 1

a) $\log_{16}(8-x^2) - \frac{1}{2}\log_4(5x-2) = \frac{1}{4}$

C.E. : 1) $x \in \left]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right[$

2) $x \in \left]\frac{2}{5}, +\infty\right[$

1) et 2) : $x \in \left]\frac{2}{5}, 2\sqrt{2}\right[$

$\forall x \in \left]\frac{2}{5}, 2\sqrt{2}\right[, \quad \log_{16}(8-x^2) - \frac{1}{2}\log_4(5x-2) = \frac{1}{4}$

$$\iff \frac{\ln(8-x^2)}{2\ln 4} - \frac{\ln(5x-2)}{2\ln 4} = \frac{1}{4}$$

$$\iff \ln(8-x^2) = \frac{1}{2}\ln 4 + \ln(5x-2)$$

$$\iff \ln(8-x^2) = \ln[2(5x-2)]$$

$$\iff 8-x^2 = 10x-4$$

$$\iff x^2+10x-12=0$$

$(\sqrt{\Delta'} \ldots)$ ($\sqrt{200}$)

$$\iff \underbrace{x = -(\sqrt{37}+5)}_{\text{à rej.}} \text{ ou } x = \sqrt{37}-5$$

Donc : $S = \{\sqrt{37}-5\}$

b) $5^{1-2x} + 25^{1+x} \leq 30 \iff 5^{1-2x} + 5^{2+2x} \leq 30$

$$\iff 5\cdot 5^{-2x} + 5^2\cdot 5^{2x} \leq 30$$

$$\iff 5^{-2x} + 5\cdot 5^{2x} - 6 \leq 0$$

$$\iff 1 + 5\cdot 5^{4x} - 6\cdot 5^{2x} \leq 0$$

Posons $y = 5^{2x}$. L'inéquation devient :

$$5y^2 - 6y + 1 \leq 0 \iff \frac{1}{5} \leq y \leq 1$$

$$\iff \frac{1}{5} \leq 5^{2x} \leq 1$$

$$\iff 5^{-1} \leq 5^{2x} \leq 5^0$$

$$\iff -1 \leq 2x \leq 0$$

$$\iff -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$$

Donc : $S = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

Question 2

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(1-x)}^{\to 0}}{\underbrace{\sin x}_{\to 0}} \underset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\cos x} = -1$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \underbrace{\left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)}_{\to 1}^{\overbrace{2-x}^{\to -\infty}} = \lim_{x\to +\infty} e^{(2-x)\ln\frac{2x-5}{2x+1}}$$

Limite de l'exposant : $$\lim_{x\to +\infty} \overbrace{(2-x)}^{\to -\infty} \overbrace{\ln \frac{2x-5}{2x+1}}^{\to 0}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln \frac{2x-5}{2x+1} \to 0}{\frac{1}{2-x} \to 0}$$

$$\underset{(H)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2(2x+1)-2(2x-5)}{(2x+1)^2} \cdot \frac{2x+1}{2x-5}}{\frac{1}{(2-x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{(\cancel{4x}+2-\cancel{4x}+10)(2-x)^2}{(2x+1)(2x-5)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{12x^2-48x+48}{4x^2-8x-5}$$

$$= 3$$

Donc : $$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{2-x} = e^3$$

Question 3

$f(x) = -3x e^{2-x}$

a) Equation de la tangente :

$$t \equiv y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = -3e^{2-x} + 3x e^{2-x} = 3e^{2-x}(x-1)$$

$$A(4,0) \in t \iff 0 = 3e^{2-x_0}(x_0-1)(4-x_0) - 3x_0 e^{2-x_0}$$

$$\iff 0 = 3e^{2-x_0}(4x_0 - x_0^2 - 4 + x_0 - x_0)$$

$$\iff 0 = 3e^{2-x_0}(-x_0^2 + 4x_0 - 4)$$

$$\iff 0 = -3e^{2-x_0}(x_0-2)^2$$

$\Leftrightarrow x_0 = 2$

D'où : $t \equiv y = 3(x-2) - 6$

$t \equiv y = 3x - 12$

Coordonnées du point de contact : $(2, -6)$

b) $A(\lambda) = -\int_4^{\lambda} f(x)\,dx \qquad (f(x) < 0, \ \forall x > 4)$

$= \int_4^{\lambda} 3xe^{2-x}\,dx \qquad$ p.p. $u = x \quad v' = e^{2-x}$, $u' = 1 \quad v = -e^{2-x}$

$= 3\left[-xe^{2-x}\right]_4^{\lambda} + 3\int_4^{\lambda} e^{2-x}\,dx$

$= 3\left[-xe^{2-x} - e^{2-x}\right]_4^{\lambda}$

$= -3\left[e^{2-x}(x+1)\right]_4^{\lambda}$

$= -3\left[e^{2-\lambda}(\lambda+1) - 5e^{-2}\right] \quad$ (u.a)

c) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \frac{15}{e^2} - 3\underbrace{\lim\limits_{\lambda \to +\infty}\left[e^{2-\lambda}(\lambda+1)\right]}$

$= \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda + 1}{e^{\lambda - 2}} \quad \frac{\to +\infty}{\to +\infty}$

$\underset{(H)}{=} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{e^{\lambda-2}}$

$= 0$

D'où : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \frac{15}{e^2}$ (u.a.)

d) $V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2\,dx = 9\pi \int_0^2 x^2 e^{4-2x}\,dx$

p.p. $u = x^2 \quad v' = e^{4-2x}$, $u' = 2x \quad v = -\frac{1}{2}e^{4-2x}$

$V = 9\pi\left[-\frac{1}{2}x^2 e^{4-2x}\right]_0^2 + 9\pi \int_0^2 xe^{4-2x}\,dx$

p.p. $u = x \quad v' = e^{4-2x}$, $u' = 1 \quad v = -\frac{1}{2}e^{4-2x}$

$V = 9\pi\left[-\frac{1}{2}x^2 e^{4-2x} - \frac{1}{2}xe^{4-2x}\right]_0^2 + \frac{9}{2}\pi \int_0^2 e^{4-2x}\,dx$

$= 9\pi\left[-\frac{1}{2}x^2 e^{4-2x} - \frac{1}{2}xe^{4-2x} - \frac{1}{4}e^{4-2x}\right]_0^2$

$$= -\frac{9\pi}{4}\left[e^{4-2x}\left(2x^2+2x+1\right)\right]_0^2$$

(V200) $$= -\frac{9\pi}{4}\left(13-e^4\right) \quad (u.v.)$$

Question 4

$f(x) = x^2 - 2\ln(x-1)$

a) • $\mathrm{dom}\, f =]1, +\infty[$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} [\underset{\downarrow\, 1}{x^2} - \underbrace{2\ln(x-1)}_{\downarrow\, -\infty}] = +\infty \qquad$ A.V. : $x = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} [\underset{\downarrow\, +\infty}{x^2} - \underbrace{2\ln(x-1)}_{\downarrow\, +\infty}] = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1 - \frac{2\ln(x-1)}{x^2}\right)\right]$$

$$= +\infty \qquad \text{pas d'A.H.}$$

$$\left(\text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x^2} \underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x-1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2-2x} = 0\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 2\,\frac{\ln(x-1)}{x}\right]$$

$$= +\infty \qquad \text{pas d'A.O.}$$

$$\left(\text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x} \underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 0\right)$$

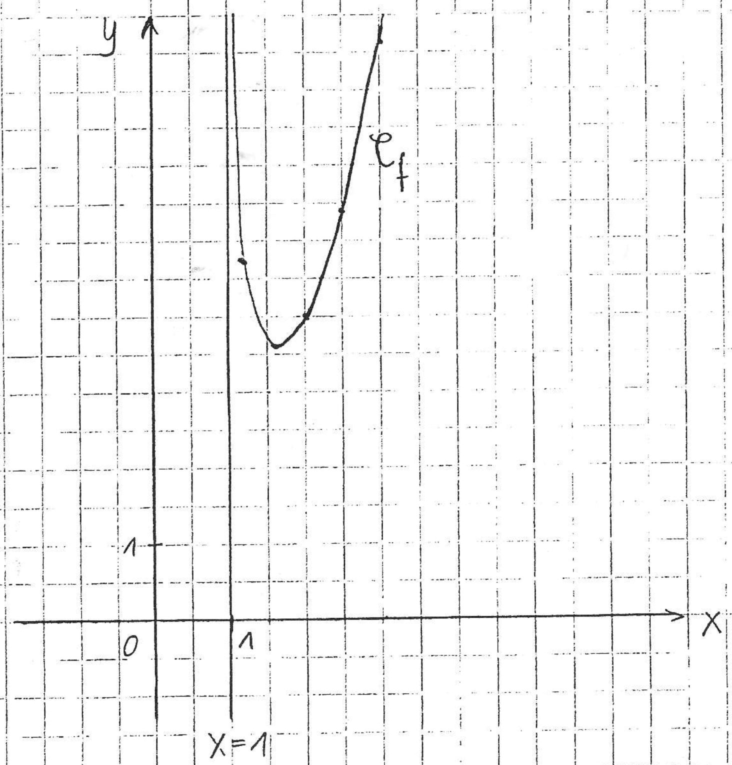
• $\forall x \in]1, +\infty[, \; f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x-1} = 2\cdot\dfrac{x^2-x-1}{x-1}$

$f'(x) = 0 \iff \underbrace{x = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}}_{\text{à rej.}}$ ou $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (V200)

$\forall x \in]1, +\infty[, \; f''(x) = 2 + \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0$

•

x	1		$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ($\simeq 1{,}6$)		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\simeq 3{,}58$ m	$\nearrow$	$+\infty$
$\mathcal{C}_f$	A.V. $x=1$	$\cup$		$\cup$	



b) $A = \int_2^3 [x^2 - 2\ln(x-1)]\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 - 2\int_2^3 \ln(x-1)\,dx$

p.p. $u = \ln(x-1)$ $v' = 1$
$u' = \frac{1}{x-1}$ $v = x$

$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x\ln(x-1)\right]_2^3 + 2\int_2^3 \frac{x}{x-1}\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x\ln(x-1)\right]_2^3 + 2\int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + 1\right)dx$ (V200)

$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x\ln(x-1) + 2\ln(x-1) + 2x\right]_2^3$

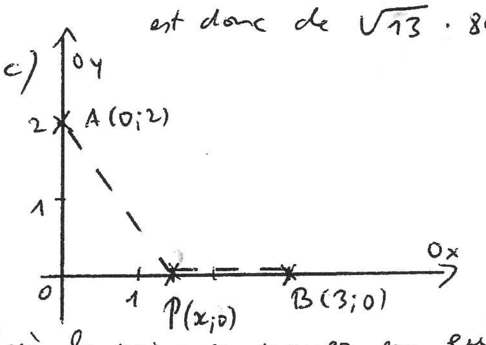
$= \frac{25}{3} - 4\ln 2$ (V200)

4. **Problème (V200) … CORRIGÉ**

(1p.) a) $\overline{OA} + \overline{OB} = 2+3 = 5$ km. Le prix à payer est donc de $5 \cdot 6.000$ $= \underline{30.000\ €}$

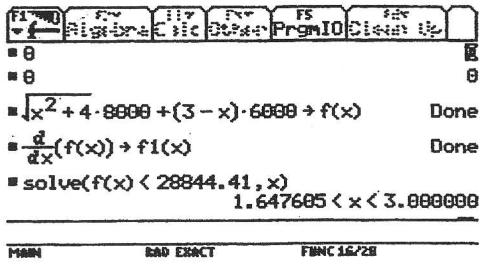
(2p.) b) $\overline{AB} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \simeq 3,61$ km. Le prix à payer est donc de $\sqrt{13} \cdot 8000 \simeq \underline{28.844,41}$ €

c)



$\overline{AP} + \overline{PB} = \sqrt{x^2+2^2} + (3-x)$; $x \in [0;3]$

(7p.)



D'où le prix à payer en euros :

$$\boxed{f(x) = \overline{AP} \cdot 8000 + \overline{BP} \cdot 6000 = \sqrt{x^2+4} \cdot 8000 + (3-x) \cdot 6000}$$

$$f'(x) \underset{V200}{=} \frac{8000\,x}{\sqrt{x^2+4}} - 6000 \quad ; \quad x \in [0;3]$$

et $f(x) < 28844,41 \overset{V200}{\Longleftrightarrow} \underline{1,65 < x < 3}$ (km)

Si x est compris entre 1,65 et 3 km, alors le câblagle [AP] puis [PB] coûte moins cher qu'aux cas a) et b).

<u>Cherchons le minimum :</u>

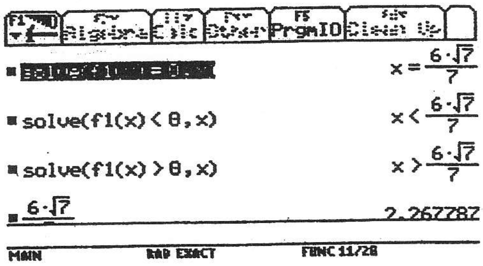
x	0		$\frac{6\sqrt{7}}{7}$		3
$f'(x)$	//	−	0	+	//
$f(x)$	//	↘	min.	↗	//

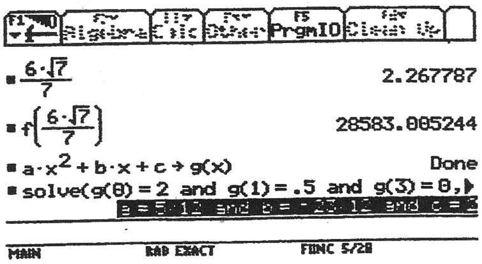
$f'(x) = 0 \overset{V200}{\Longleftrightarrow} x = \frac{6\sqrt{7}}{7}$

$f'(x) > 0 \underset{V200}{\Longleftrightarrow} x > \frac{6\sqrt{7}}{7}$ et $f'(x) < 0 \underset{V200}{\Longleftrightarrow} x < \frac{6\sqrt{7}}{7}$

Le coût est donc minimal pour $x = \frac{6\sqrt{7}}{7} \simeq 2,27$ km

et vaut alors $f\left(\frac{6\sqrt{7}}{7}\right) \simeq \underline{28.583\ €}$





d) Soit g la fonction cherchée ; on a :

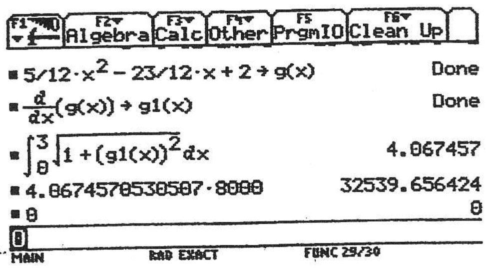
(5p.)

$$\begin{cases} g(0) = 2 \\ g(3) = 0 \\ g(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3 conditions $\Longrightarrow$ polynôme de degré 2

c.à-d. $g(x) = ax^2 + bx + c$

par la V200 : $\underline{g(x) = \frac{5}{12}x^2 - \frac{23}{12}x + 2}$



Alors $g'(x) = \frac{5}{6}x - \frac{23}{12}$.

La longueur de la courbe G_g entre A et B est donnée par $l = \int_0^3 \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx \overset{V200}{\simeq} \underline{4,07 \text{ km}}$.

D'où le coût : $l \cdot 8000 \simeq \underline{32.540\ €}$.

Dans ce cas, il faut donc payer environ 32.540 €.

[signature]