

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2008

Section: C, D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Question 1 (5 + 4 = 9 points)

Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $\log_{16}(8 - x^2) - \frac{1}{2} \log_4(5x - 2) = \frac{1}{4}$

b) $5^{1-2x} + 25^{1+x} \leq 30$

Question 2 (1 + 4 = 5 points)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{\sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{2-x}$

Question 3 (4 + 4 + 2 + 4 = 14 points)

On donne la fonction f définie par $f(x) = -3xe^{2-x}$.

- a) Etablir l'équation de la tangente t à la courbe C_f passant par le point $A(4,0)$ et déterminer les coordonnées du point de contact de t avec C_f .
- b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda > 4$. Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des x et les droites d'équation $x = 4$ et $x = \lambda$.
- c) Trouver $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.
- d) Soit S la partie du plan limité par C_f , l'axe des x , l'axe des y et la droite d'équation $x = 2$. Calculer le volume du corps engendré par la rotation de S autour de l'axe des x .

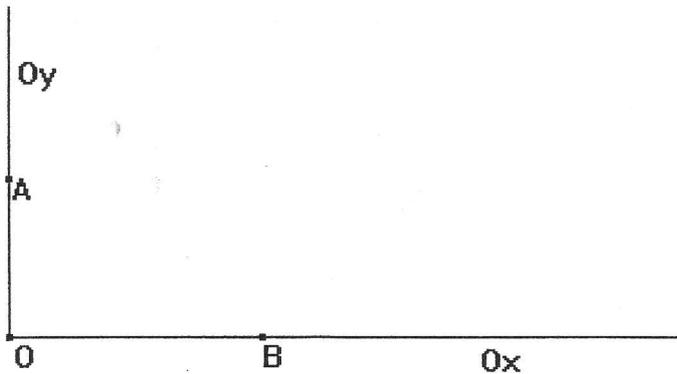
Question 4 (13 + 4 = 17 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2\ln(x-1)$.

- a) Faire une étude complète de f :
 - domaine de définition ;
 - limites et asymptotes ;
 - dérivée première et dérivée seconde ;
 - tableau récapitulatif (variations, extrema éventuels, concavité, points d'inflexion éventuels) ;
 - représentation graphique dans un repère orthonormé.
- b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des x et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

Les deux magasins A et B de la chaîne de supermarchés *Luxmarché* sont situés sur deux routes qui se coupent à angle droit au point O (voir figure).

B se situe à 3 km de O et A se situe à 2 km de O.



Pour mieux gérer les stocks, la chaîne *Luxmarché* décide de mettre en réseau les deux filiales A et B en les reliant avec des câbles électriques pour son réseau informatique.

En tant que consultant, votre mission consiste à aider *Luxmarché* à calculer et à minimiser les coûts.

- Calculer le coût du câblage si on pose les câbles en utilisant des canaux existants le long des routes OA et OB, sachant que le coût est de 6000 € par kilomètre de câbles posés.
- Calculer le coût du câblage si on pose les câbles en choisissant le chemin le plus court, quitte à creuser de nouveaux canaux, sachant que dans ce cas il faut payer 8000 € par kilomètre de câbles posés.
- Montrer qu'il existe un point $P(x,0)$ situé entre O et B, tel que le câblage reliant A à B en passant par P coûte moins cher que dans les deux cas précédents. Déterminer toutes les positions possibles pour P. Quel est le coût minimum dans ce cas ?
- L'entreprise *Luxmarché* décide maintenant de faire passer le câblage entre A et B par le point $D(1; \frac{1}{2})$ où se trouve son dépôt de marchandises.

Déterminer l'expression d'une fonction polynôme de degré minimum reliant A à B et calculer le coût dans ce cas.

Rappel : Pour une fonction dérivable sur $[a, b]$, la formule permettant de calculer la longueur de la partie du graphe de la fonction f allant de $M(m, f(m))$ à $N(n, f(n))$ est donnée par

$$l = \int_m^n \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

(15 points)