<u>Corrigé 1[ère] CD mathématiques 2</u>

Théorie: (2+2 = 4 points)

Démontrez:

1. $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}\ et\ \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \colon\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot ln(a)}$
2. $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}\ et\ \forall x \in \mathbb{R} \colon\ (a^x)' = a^x \cdot ln(a)$

voir EM66

Exercice 1: (6+7 = 13 points)

Résolvez l'équation et l'inéquation ci-dessous, en précisant les conditions d'existence.

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{15}{2^{-x}} = 2$ C.E. : $2^{-x} \neq 0$ toujours vrai $D_E = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2^{-x} - 15 \cdot 2^x - 2 = 0 \qquad | \cdot 2^x > 0$

$\Leftrightarrow 2^0 - 15 \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 2^x = 0 \qquad posons\ y = 2^x$

$\Leftrightarrow -15 \cdot y^2 - 2 \cdot y + 1 = 0 \qquad \Delta = (-2)^2 + 4 \cdot 15 \cdot 1 = 64 > 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2 \pm 8}{-30}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{5}\ \ ou\ \ y = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{5}\ \ ou\ \ 2^x = -\frac{1}{3}\ impossible\ car\ 2^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^{\log_2\left(\frac{1}{5}\right)}$$

$\Leftrightarrow x = \log_2(5^{-1})$ car $\exp_2$ est une bijection

$\Leftrightarrow x = -\log_2(5) \qquad S = \{-\log_2(5)\}$

2. $2 \cdot \left(\log_{\frac{1}{3}}(x)\right)^2 + \log_{\frac{1}{3}}(x) - 8 \geq \log_3(x) + 4$ C.E. : x > 0 $D_E = \mathbb{R}_0^+$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\log_{\frac{1}{3}}(x)\right)^2 + \log_{\frac{1}{3}}(x) - 12 - \frac{\log_{\frac{1}{3}}(x)}{\log_{\frac{1}{3}}(3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\log_{\frac{1}{3}}(x)\right)^2 + \log_{\frac{1}{3}}(x) - 12 + \log_{\frac{1}{3}}(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\log_{\frac{1}{3}}(x)\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{3}}(x) - 12 \geq 0 \qquad posons\ y = \log_{\frac{1}{3}}(x)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot y^2 + 2 \cdot y - 12 \geq 0$$

résolvons : $2 \cdot y^2 + 2 \cdot y - 12 = 0$ $\quad\quad \Delta = 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 12 = 100 > 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm 10}{4} \Leftrightarrow y = -3 \; ou \; y = 2$$

Tableau des signes:

y	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$2 \cdot y^2 + 2 \cdot y - 12$	+	0	-	0	+

$\Leftrightarrow y \leq -3 \;\; ou \; y \geq 2$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x) \leq -3 \;\; ou \;\; \log_{\frac{1}{3}}(x) \geq 2$

$\Leftrightarrow x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \;\;\; ou \; x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$ car $\log_{\frac{1}{3}}$ est une bijection strictement décroissante

$\Leftrightarrow x \geq 27 \;\; ou \; x \leq \dfrac{1}{9}$

en tenant compte de la C.E. : $S = \left]0; \frac{1}{9}\right] \cup [27; +\infty[$

Exercice 2: (2+4 = 6 points)

Calculez les limites suivantes en justifiant.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\overbrace{\left(\log_{\frac{4}{3}}\left(\overbrace{\left(\frac{5}{\underbrace{e^{-x}}_{\to 0^+}}\right)}^{\to +\infty}\right)\right)}_{\to +\infty}} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-4}\right)^{2x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{7}{x-4}\right)^{2x-1}$

   changement de variable: $\quad \frac{1}{y} = \frac{7}{x-4} \Leftrightarrow x - 4 = 7y \Leftrightarrow x = 7y + 4$

   donc si $x \to +\infty$ alors $y \to +\infty$

$= \lim\limits_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{14y+7}$

$= \lim\limits_{y \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^{14y} \;\; \lim\limits_{y \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^{7}$

$= \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^{y}\right)^{14} \cdot \lim\limits_{y \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\underbrace{y}_{\to 0}}\right)^{7}$

$= e^{14} \cdot 1 = e^{14}$

Exercice 3: (5+4+3+2+2+3 = 19 points)

Réalisez l'étude complète de la fonction suivante: $f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{2-x}$.

1. Déterminez les domaines de définition et de dérivabilité. Calculez les limites aux bornes de ce domaine et étudiez le comportement asymptotique de la fonction f.

$D_f = \mathbb{R} = D_{f'} = D_{f''}$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{(x+1)^2}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^{2-x}}_{\to 0} \overset{F.I.\text{"}\infty\cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{x^2+2x+1}^{\to +\infty}}{\underbrace{e^{x-2}}_{\to +\infty}} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{2x+2}^{\to +\infty}}{\underbrace{e^{x-2}}_{\to +\infty}} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\underbrace{e^{x-2}}_{\to +\infty}} = 0$$

donc A.H. : y = 0 en $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{(x+1)^2}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^{2-x}}_{\to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{2-x}}_{\to +\infty} = -\infty$$

donc B.P. dans la direction de (Oy) en $-\infty$

2. Calculez la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction f et leurs racines respectives.

$\forall x \in D_{f'}: f'(x) = (2x+2) \cdot e^{2-x} + (x+1)^2 \cdot e^{2-x} \cdot (-1)$
$= e^{2-x} \cdot (2x + 2 - x^2 - 2x - 1) = e^{2-x} \cdot (1 - x^2)$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = -1$

$\forall x \in D_{f''}: f''(x) = e^{2-x} \cdot (1 - x^2) \cdot (-1) + e^{2-x} \cdot (-2x)$
$= e^{2-x} \cdot (x^2 - 2x - 1)$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8 > 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \; ou \; x = 1 + \sqrt{2}$ avec $1 - \sqrt{2} \cong -0{,}4 \; et \; 1 + \sqrt{2} \cong 2{,}4$

3. Établissez le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+		+	0	−		−
$f''(x)$	+		+	0	−		−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ∪ ↘	min	∪ ↗	P.I.	∩ ↗	max	∩ ↘	P.I.	∪ ↘ 0

4. Déterminez les coordonnées (valeurs exactes) des extréma et des points d'inflexion éventuels.

min: $f(-1) = (-1+1)^2 \cdot e^{2-(-1)} = 0$
max : $f(1) = (1+1)^2 \cdot e^{2-1} = 4e \cong 10{,}87$
P.I. : $f(1-\sqrt{2}) = (2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{2-(1-\sqrt{2})} = (6 - 4\sqrt{2})e^{1+\sqrt{2}} \cong 3{,}84$
et : $f(1+\sqrt{2}) = (2+\sqrt{2})^2 \cdot e^{2-(1+\sqrt{2})} = (6 + 4\sqrt{2})e^{1-\sqrt{2}} \cong 7{,}70$

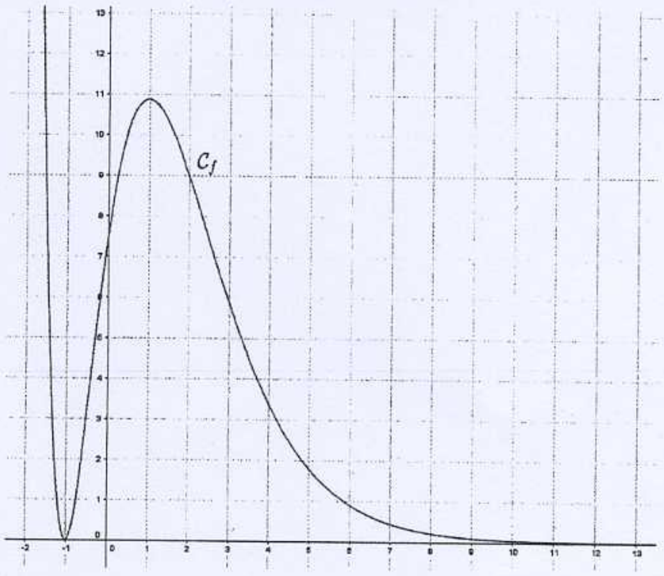
5. Déterminez les coordonnées (valeurs exactes) des points d'intersection du graphe cartésien de f avec les axes du repère.
axe des x: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ donc $A(-1\,;0)$
axe des y: $f(0) = (0+1)^2 \cdot e^{2-0} = e^2 \cong 7{,}39$ donc $B(0; e^2)$

6. Représentez f graphiquement dans un repère orthonormé (unité: 1 cm).

tableau des valeurs:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	54,60	0,00	7,39	10,87	9,00	5,89	3,38	1,79	0,90	0,43	0,20	0,09	0,04

représentation graphique:



Exercice 4: (4+3+5 = 12 points)

Calculez les primitives suivantes:

1. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx \quad sur\ ]-5;5[$

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx = \int \frac{3x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx - \int \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{25-x^2}}{\frac{1}{2}} - Arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + cte$$

$$= -3\cdot\sqrt{25-x^2} - Arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + cte$$

2. $\int (2x^2-1)\cdot ln(2x)\,dx \quad sur\ ]0;+\infty[$

I.P.P.:

u(x) = $ln(2x)$ u'(x) = $\frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

v'(x) = $2x^2-1$ v(x) = $2\cdot\frac{x^3}{3} - x$

$$\int (2x^2-1)\cdot ln(2x)\,dx = ln(2x)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot x^3 - x\right) - \int \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot x^3 - x\right)dx$$

$$= ln(2x)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot x^3 - x\right) - \int \left(\frac{2}{3}\cdot x^2 - 1\right)dx$$

$$= ln(2x)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot x^3 - x\right) - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + x + cte$$

$$= ln(2x)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot x^3 - x\right) - \frac{2}{9}x^3 + x + cte$$

3. $\int \frac{4x^3-16x^2+17x-4}{x^2-4x+4}\,dx \quad sur\ ]2;+\infty[$

en déterminant d'abord les coefficients a, b et c tels que:

$$\frac{4x^3-16x^2+17x-4}{x^2-4x+4} = a\cdot x + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$$

$$a\cdot x + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2} = \frac{a\cdot x\cdot(x-2)^2 + b\cdot(x-2) + c}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{ax^3 - 4ax^2 + 4ax + bx - 2b + c}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{ax^3 - 4ax^2 + (4a+b)x + (-2b+c)}{(x-2)^2}$$

or $\frac{ax^3-4ax^2+(4a+b)x+(-2b+c)}{(x-2)^2} = \frac{4x^3-16x^2+17x-4}{x^2-4x+4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ -4a=-16 \\ 4a+b=17 \\ -2b+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=4 \\ 4\cdot 4+b=17 \\ -2b+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \\ -2\cdot 1+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$$

donc $\frac{4x^3-16x^2+17x-4}{x^2-4x+4} = 4\cdot x + \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{(x-2)^2}$

$$\int \frac{4x^3-16x^2+17x-4}{x^2-4x+4}\,dx = \int 4\cdot x + \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= 4\int x\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx - 2\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

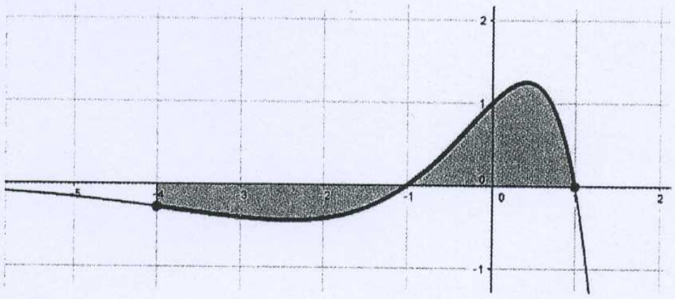
$$= 4\cdot\frac{x^2}{2} + ln(|x-2|) - 2\cdot\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + cte$$

$$= 2\cdot x^2 + ln(|x-2|) + \frac{2}{x-2} + cte$$

Exercice 5: (6 points)

Voici la représentation graphique de la fonction $f(x) = e^x \cdot (1 - x^2)$ dans un repère orthonormé.

Calculez l'aire de la surface coloriée sur la figure.



Déterminons d'abord une primitive de $f(x)$:

$\int e^x \cdot (1 - x^2)\ dx$

I.P.P.:

u(x) = $1 - x^2$ u'(x) = $-2x$

v'(x) = e^x v(x) = e^x

$$= (1 - x^2) \cdot e^x - \int -2x \cdot e^x\, dx$$
$$= (1 - x^2) \cdot e^x + \int 2x \cdot e^x\, dx$$

I.P.P.:

g(x) = $2x$ g'(x) = 2

h'(x) = e^x h(x) = e^x

$$= (1 - x^2) \cdot e^x + 2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x\, dx$$
$$= (1 - x^2) \cdot e^x + 2x \cdot e^x - 2 \cdot e^x + \text{cte}$$
$$= (-x^2 + 2x - 1) \cdot e^x + cte$$

Aire = $- \int_{-4}^{-1} f(x)\ dx + \int_{-1}^{1} f(x)\ dx$

$$= -[(-x^2 + 2x - 1) \cdot e^x]_{-4}^{-1} + [(-x^2 + 2x - 1) \cdot e^x]_{-1}^{1}$$
$$= -[(-(-1)^2 + 2(-1) - 1) \cdot e^{-1} - (-(-4)^2 + 2(-4) - 1) \cdot e^{-4}]$$
$$+ [(-1^2 + 2 \cdot 1 - 1) \cdot e^1 - (-(-1)^2 + 2(-1) - 1) \cdot e^{-1}]$$
$$= -(-4 \cdot e^{-1} + 25e^{-4}) + (0 \cdot e + 4e^{-1})$$
$$= 4e^{-1} - 25e^{-4} + 4e^{-1}$$
$$= 8e^{-1} - 25e^{-4} \text{ u.a.}$$
$$\cong 2{,}49 \text{ u.a.}$$