Corrigé

Question I

$$f(x) = -4 \ln(x+5) - \frac{x^2}{2} + 5$$

1) $\text{dom} f =]-5\,; +\infty[$

$$\lim_{x \to -5} \Big(-4 \underbrace{\ln(x+5)}_{\to -\infty} - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\to \frac{25}{2}} + 5 \Big) = +\infty$$

A.V. : $x = -5$

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{-4 \ln(x+5)}_{\to -\infty} - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\to +\infty} + 5 \Big) = -\infty$$

pas d'A.H.D.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \Big(-4 \underbrace{\frac{\ln(x+5)}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{x}{2}}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0} \Big)$$

$$= -\infty$$

pas d'A.O.D.

B.P. de direction (Oy)

en effet : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+5)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+5} = 0$

f.i. " $\frac{\infty}{\infty}$ "

2) $\forall x \in \text{dom} f' =]-5\,; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-4}{x+5} - x = \frac{-x^2 - 5x - 4}{x+5}$$

$\Delta = 9\,;\ x_1 = -4$, $x_2 = -1$

$(x+5)$ str. positif

$$f''(x) = \frac{(-2x-5)(x+5) - (-x^2-5x-4) \cdot 1}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 10x - 21}{(x+5)^2}$$

$\Delta = 16\,;\ x_3 = -7$ à rejeter, $x_4 = -3$

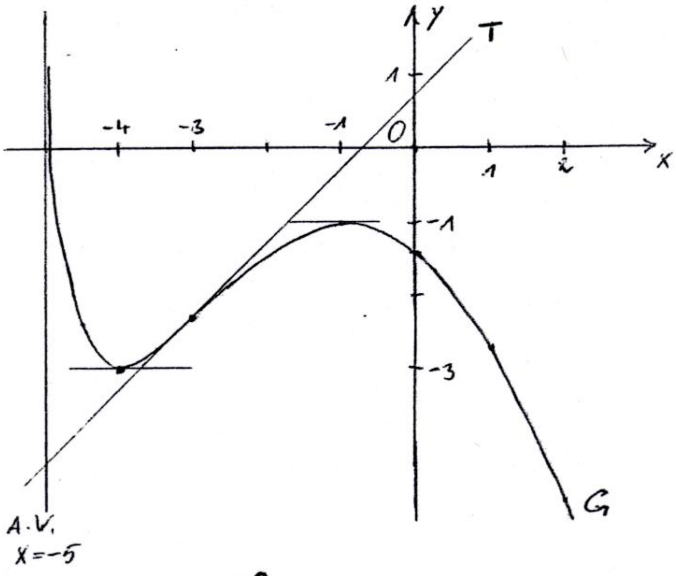
tableau de variation :

x	-5		-4		-3		-1		$+\infty$
f''	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f'	‖	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	-3 MIN	↗	$-2{,}3$	↗	$-1{,}0$ MAX	↘	$-\infty$
concavité de G	‖				P.I.				

$f(-4) = -3\,;\ f(-3) \approx -2{,}3\,;\ f(-1) \approx -1{,}0$

3) $f'(-3) = 1$

x	$-4{,}5$	-4	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	$-2{,}4$	-3	$-2{,}3$	$-1{,}0$	$-1{,}4$	$-2{,}7$	$-4{,}8$



4) aire $A = -\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\, dx$

Calculons d'abord :

$$F(x) = -\int f(x)\,dx = \int \Big(4\ln(x+5) + \frac{x^2}{2} - 5\Big)dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - 5x + 4\int \ln(x+5)\,dx$$

par parties :

$u(x) = \ln(x+5)$ $\quad v'(x) = 1$

$u'(x) = \frac{1}{x+5}$ $\quad v(x) = x$

$$= \frac{x^3}{6} - 5x + 4x\ln(x+5) - 4\int \frac{x}{x+5}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - 5x + 4x\ln(x+5) - 4\int\Big(1 - \frac{5}{x+5}\Big)dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - 5x + 4x\ln(x+5) - 4x + 20\ln(x+5) + C$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - 9x + (4x+20)\ln(x+5) + C$$

aire $A = \Big[F(x)\Big]_{-4}^{0} = 20\ln 5 - \dfrac{76}{3}$

$\approx$ **6,86 cm²**

Question II

1) C.E. : $4 - e^{2x} \neq 0$

$\left[4 - e^{2x} = 0 \right.$
$\Leftrightarrow e^{2x} = e^{\ln 4}$
$\Leftrightarrow 2x = \ln 4$
$\Leftrightarrow x = \ln 2 \left. \right]$

$D = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$

signe de $4 - e^{2x} \geq 0$

$\Leftrightarrow 4 > e^{2x}$
$\Leftrightarrow e^{\ln 4} > e^{2x}$
$\Leftrightarrow \ln 4 > 2x$
$\Leftrightarrow x < \ln 2$

signe de $e^{-x+1} - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^{-x+1} \geq e^{\ln 2}$
$\Leftrightarrow -x+1 \geq \ln 2$
$\Leftrightarrow -x \geq -1 + \ln 2$
$\Leftrightarrow x \leq 1 - \ln 2$

x		$1-\ln 2$		$\ln 2$	
$4-e^{2x}$	+	⋮	+	0	−
$e^{-x+1}-2$	+	0	−	⋮	−
$\dfrac{e^{-x+1}-2}{4-e^{2x}}$	+	0	−	‖	+

$S =]-\infty ; 1-\ln 2] \cup]\ln 2 ; +\infty[$

2) C.E. : $3^x - 2 > 0$
$\Leftrightarrow e^{x \cdot \ln 3} > e^{\ln 2}$
$\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$

$\forall x \in D = \left] \dfrac{\ln 2}{\ln 3} ; +\infty \right[$,

$x + \log_3 (3^x - 2) = \log_9 (225)$

$\Leftrightarrow \log_3 3^x + \log_3 (3^x - 2) = \dfrac{\log_3 (225)}{2}$

$\Leftrightarrow \log_3 3^x (3^x - 2) = \log_3 \sqrt{225}$

$\Leftrightarrow 3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 15 = 0$

poser $3^x = y$

$y^2 - 2 \cdot y - 15 = 0$

$\Delta = 64$

$y = 5$ ou $y = -3$

$3^x = 5$ ou $3^x = -3$ impossible car $3^x > 0$

$x = \log_3 5$

$x = \dfrac{\ln 5}{\ln 3} \in D$

$S = \left\{ \dfrac{\ln 5}{\ln 3} \right\}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{5}{x}}$

poser : $y = -2x \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} y$

$\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{5}{x}}$

$= \lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{-10}{y}}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \Big[\underbrace{(1+y)^{\frac{1}{y}}}_{\to e} \Big]^{-10} = e^{-10}$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 2^{1-x} = e^{(1-x)\ln 2}$,

$h'(x) = (-\ln 2) e^{(1-x)\ln 2}$

$h'(1) = -\ln 2$; $h(1) = 1$

$y = (-\ln 2)(x - 1) + 1$

$\Leftrightarrow y = (-\ln 2) x + 1 + \ln 2$

Question III

1) a) $\dfrac{6x+1}{4x^2-4x+1} = \dfrac{a}{2x-1} + \dfrac{b}{(2x-1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

$\Leftrightarrow \dfrac{6x+1}{(2x-1)^2} = \dfrac{a(2x-1)+b}{(2x-1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 6 \\ -a+b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$

b) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(\dfrac{3}{2x-1} + \dfrac{4}{(2x-1)^2} \right) dx$

$= \dfrac{3}{2} \ln|2x-1| + (-2) \cdot \dfrac{1}{2x-1} + C$

Déterminons C :

$F(0) = 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \ln 1 - 2 \cdot \dfrac{1}{-1} + C = 4$

$\Leftrightarrow C = 2$

$\forall x \in I = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$

$F(x) = \dfrac{3}{2} \ln(1-2x) - \dfrac{2}{2x-1} + 2$

2) $\int \arcsin(2x)\,dx$

par parties :

$u(x) = \arcsin(2x)$ $\quad v'(x) = 1$

$u'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ $\quad v(x) = x$

$= x \cdot \arcsin(2x) - \int \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

$= x \cdot \arcsin(2x) + \dfrac{1}{2} \int \dfrac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

$= x \cdot \arcsin(2x) + \dfrac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C$

3) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan x)^2\,dx$

$= \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2\tan x + \tan^2 x)\,dx$

$= \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2 x - 2\,\dfrac{-\sin x}{\cos x} \right) dx$

$= \pi \cdot \Big[\tan x - 2 \cdot \ln|\cos x| \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \pi \cdot \left[\left(1 - 2 \cdot \ln \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 - 2 \cdot \ln 1) \right]$

$= \pi \cdot (1 + \ln 2)$ u.v.

Corrigé - Mathématiques II 2010

Problème V200

Sections C et D repêchage

Soit $f(t) = 8 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-8{,}5)\right] + 21$

avec $0 \leq t \leq 24$

1) a) À 2h30, la température est minimale. Sa valeur est de 13°C.

À 14h30, la température est maximale. Sa valeur est de 29°C.

b) Il suffit de résoudre graphiquement l'inéquation $f(t) \leq 22$ (ou bien algébriquement l'équation $f(t) = 22$)

On a $f(t) \leq 22 \Leftrightarrow t \leq t_1$ ou $t \geq t_2$

avec $t_1 \cong 8{,}98$
$t_2 \cong 20{,}02$

On en déduit que la température ne dépasse pas 22°C pendant approximativement 13 heures.

c) La vitesse de croissance de la température est décrite par la dérivée première f'.
On détermine donc le maximum de cette dernière en cherchant l'instant où la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe.
On résout $f''(t) = 0$

$\Leftrightarrow t = 8{,}5$ ou $t = 20{,}5$

On en déduit le tableau suivant

t	0		$8{,}5$		$20{,}5$		24
$f'(t)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	
$f''(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

à 8h30, la vitesse de croissance de la température est donc maximale. Sa valeur est alors égale à

$$f'(8{,}5) \cong 2{,}09 \text{ °C par heure}$$

d) La température moyenne entre 6h00 et 18h00 est égale à

$$\frac{1}{18-6}\int_6^{18} f(t)\,dt \cong 25{,}04\text{°C}$$

2) a) Soit $g(t) = 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-8{,}5)\right] + a + b$

avec $24 \leq t \leq 48$

Pour déterminer les constantes a et b, il suffit de résoudre le système suivant

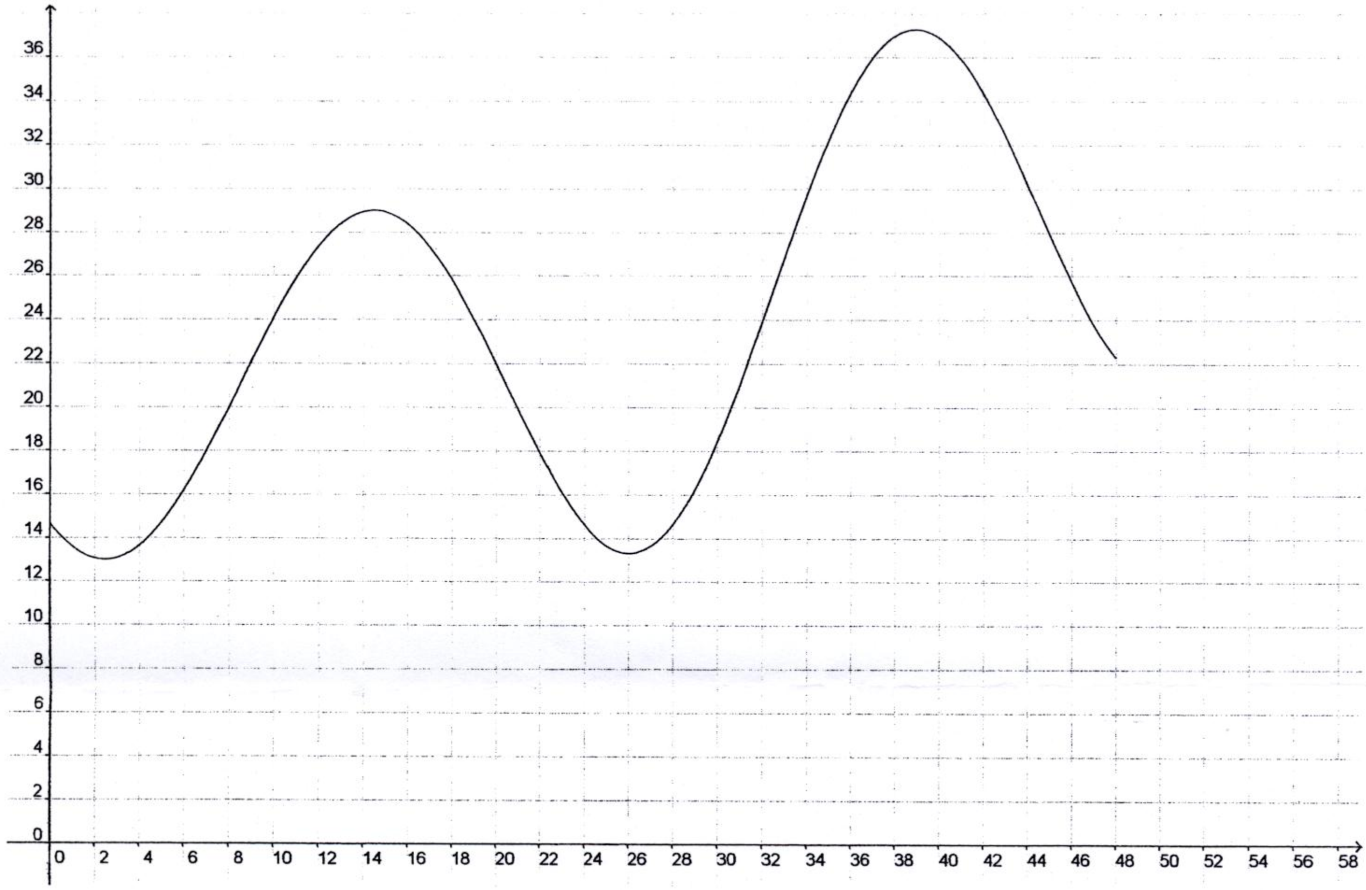
$$\begin{cases} f(24) = g(24) \\ f'(24) = g'(24) \end{cases}$$

Alors on obtient que

$a \cong 0{,}32$

$b \cong 14{,}94$

b) Représentation graphique des fonctions f et g :



Corrigé – Mathématiques II
Problème V200
Sections C et D
(2010)