

Corrigé

Question I

$$f(x) = -4 \ln(x+5) - \frac{x^2}{2} + 5$$

1) dom $f =]-5; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \left(-4 \underbrace{\ln(x+5)}_{\rightarrow -\infty} - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\rightarrow \frac{25}{2}} + 5 \right) = +\infty$$

A.V.: $x = -5$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-4 \underbrace{\ln(x+5)}_{\rightarrow -\infty} - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\rightarrow +\infty} + 5 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-4 \frac{\ln(x+5)}{x} - \frac{x + \frac{5}{x}}{2} \right)$$

par d'A.H.D. $\rightarrow 0$ $\rightarrow +\infty$ $\rightarrow 0$

= $-\infty$ par d'A.O.D.

B.P. de direction $(0,)$

en effet: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+5)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+5} = 0$

f.i. " $\frac{\infty}{\infty}$ "

2) $\forall x \in \text{dom } f' =]-5; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-4}{x+5} - x = \frac{-x^2 - 5x - 4}{x+5}$$

$\Delta = 9; x_1 = -4; x_2 = -1$

str. positif

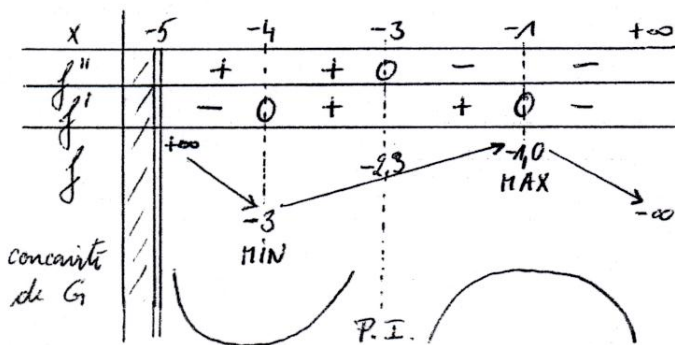
$$f''(x) = \frac{(-2x-5)(x+5) - (-x^2-5x-4) \cdot 1}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 10x - 21}{(x+5)^2}$$

$\Delta = 16; x_3 = -7; x_4 = -3$

à rejeter

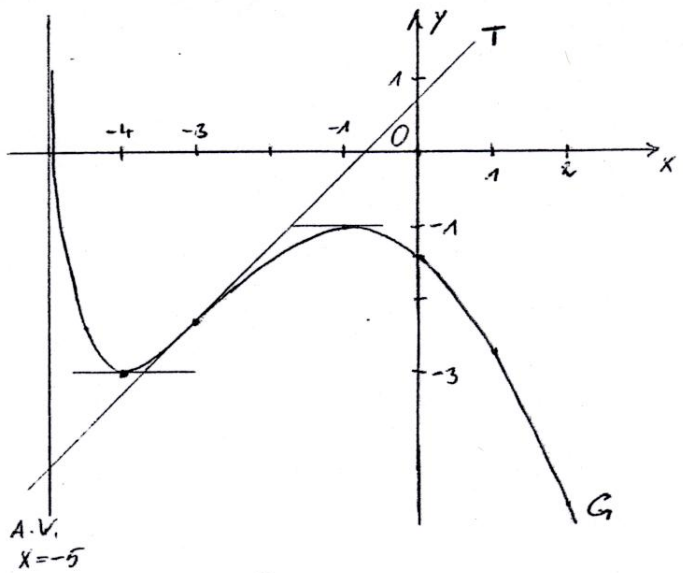
tableau de variation:



$f(-4) = -3; f(-3) \approx -2,3; f(-1) \approx -1,0$

3) $f'(-3) = 1$

x	-4,5	-4	-3	-1	0	1	2
f(x)	-2,4	-3	-2,3	-1,0	-1,4	-2,7	-4,8



4) aire $A = - \int_{-4}^0 f(x) dx$

Calculons d'abord:

$$F(x) = - \int f(x) dx = \int \left(4 \ln(x+5) + \frac{x^2}{2} - 5 \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - 5x + 4 \int \ln(x+5) dx$$

par parties:

$u(x) = \ln(x+5)$	$u'(x) = 1$
$v(x) = \frac{x^2}{2} - 5x$	$v'(x) = x - 5$

$$= \frac{x^3}{6} - 5x + 4x \ln(x+5) - 4 \int \frac{x}{x+5} dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - 5x + 4x \ln(x+5) - 4 \int \left(1 - \frac{5}{x+5} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - 5x + 4x \ln(x+5) - 4x + 20 \ln(x+5) + C$$

$$= \frac{1}{6} x^3 - 9x + (4x + 20) \ln(x+5) + C$$

aire $A = [F(x)]_{-4}^0 = 20 \ln 5 - \frac{76}{3}$

$\approx \underline{\underline{6,86 \text{ cm}^2}}$

Question 4

1) C.E.: $4 - e^{2x} \neq 0$

$$\begin{aligned} \Gamma 4 - e^{2x} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2x} &= e^{\ln 4} \\ \Leftrightarrow 2x &= \ln 4 \\ \Leftrightarrow x &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$$

signe de $4 - e^{2x} > 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4 &> e^{2x} \\ \Leftrightarrow e^{\ln 4} &> e^{2x} \\ \Leftrightarrow \ln 4 &> 2x \\ \Leftrightarrow x &< \ln 2 \end{aligned}$$

signe de $e^{-x+1} - 2 > 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{-x+1} &> e^{\ln 2} \\ \Leftrightarrow -x+1 &\geq \ln 2 \\ \Leftrightarrow -x &\geq -1 + \ln 2 \\ \Leftrightarrow x &\leq 1 - \ln 2 \end{aligned}$$

x	$1 - \ln 2$	$\ln 2$		
$4 - e^{2x}$	+	+	0	-
$e^{-x+1} - 2$	+	0	-	-
$\frac{e^{-x+1} - 2}{4 - e^{2x}}$	+	0	-	+

$$S' =]-\infty; 1 - \ln 2] \cup]\ln 2; +\infty[$$

2) C.E.: $3^x - 2 > 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{x \cdot \ln 3} &> e^{\ln 2} \\ \Leftrightarrow x &> \frac{\ln 2}{\ln 3} \end{aligned}$$

$$\forall x \in D =]\frac{\ln 2}{\ln 3}; +\infty[,$$

$$x + \log_3(3^x - 2) = \log_3(225)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^x + \log_3(3^x - 2) = \frac{\log_3(225)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^x(3^x - 2) = \log_3 \sqrt{225}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 15 = 0$$

pose $3^x = y$

$$y^2 - 2y - 15 = 0$$

$$\Delta = 64$$

$$y = 5 \text{ ou } y = -3$$

$$3^x = 5 \text{ ou } 3^x = -3$$

$$x = \log_3 5 \text{ ou } \text{impossible car } 3^x > 0$$

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 3} \in D$$

$$S' = \left\{ \frac{\ln 5}{\ln 3} \right\}$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{5}{x}}$

pose: $y = -2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{5}{x}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{-10}{y}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\underbrace{(1 + y)^{\frac{1}{y}}}_{\rightarrow e} \right]^{-10} = e^{-10}$$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 2^{1-x} = e^{(1-x) \ln 2}$

$$h'(x) = (-\ln 2) e^{(1-x) \ln 2}$$

$$h'(1) = -\ln 2; h(1) = 1$$

$$y = (-\ln 2)(x - 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow y = (-\ln 2)x + 1 + \ln 2$$

Question III

$$1) a) \frac{6x+1}{4x^2-4x+1} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{(2x-1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x+1}{(2x-1)^2} = \frac{a(2x-1) + b}{(2x-1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 6 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$b) F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{4}{(2x-1)^2} \right) dx$$

$$= \frac{3}{2} \ln |2x-1| + (-2) \cdot \frac{1}{2x-1} + C$$

Determinons C :

$$F(0) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \ln 1 - 2 \cdot \frac{1}{-1} + C = 4$$

$$\Leftrightarrow C = 2$$

$$\forall x \in I =]-\infty; \frac{1}{2}[$$

$$F(x) = \frac{3}{2} \ln |1-2x| - \frac{2}{2x-1} + 2$$

$$2) \int \arcsin(2x) dx$$

par parties :

$$\begin{cases} u(x) = \arcsin(2x) & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} & v(x) = x \end{cases}$$

$$= x \cdot \arcsin(2x) - \int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$= x \cdot \arcsin(2x) + \frac{1}{2} \int \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$= x \cdot \arcsin(2x) + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C$$

$$3) V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2 \tan x + \tan^2 x) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2 x - 2 \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx$$

$$= \pi \left[\tan x - 2 \cdot \ln |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \pi \left[\left(1 - 2 \cdot \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(0 - 2 \cdot \ln 1 \right) \right]$$

$$= \underline{\underline{\pi \cdot (1 + \ln 2) \text{ m.v.}}}$$

Problème 1200

Sections C et D repêchage

Soit $f(t) = 8 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-8,5)\right] + 21$
avec $0 \leq t \leq 24$

1) a) à 2h30, la température est minimale.
Sa valeur est de 13°C.

à 14h30, la température est maximale.
Sa valeur est de 29°C.

b) Il suffit de résoudre graphiquement
l'inéquation $f(t) \leq 22$ (ou bien
algébriquement l'équation $f(t) = 22$)
On a $f(t) \leq 22 \Leftrightarrow t \leq t_1$ ou $t \geq t_2$

$$\text{avec } t_1 \approx 8,38 \\ t_2 \approx 20,02$$

On en déduit que la température
ne dépasse pas 22°C pendant
approximativement 13 heures.

c) La vitesse de croissance de la
température est décrite par la
dérivée première f' .

On détermine donc le maximum
de cette dernière en cherchant
l'instant où la dérivée seconde f''
s'annule et change de signe.

On résout $f''(t) = 0$

$$\Leftrightarrow t = 8,5 \text{ ou } t = 20,5$$

On en déduit le tableau suivant

t	0	8,5	20,5	24	
f'(t)		↗ M	↘ m	↗	
f''(t)	+	0	-	0	+

à 8h30, la vitesse de croissance de
la température est donc maximale.

Sa valeur est alors égale à

$$f'(8,5) \approx 2,03 \text{ °C par heure}$$

d) La température moyenne entre 6h00
et 18h00 est égale à

$$\frac{1}{18-6} \int_6^{18} f(t) dt \approx 25,04 \text{ °C}$$

2) a) Soit $g(t) = 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-8,5)\right] + a + b$
avec $24 \leq t \leq 48$

Pour déterminer les constantes a et b,
il suffit de résoudre le
système suivant

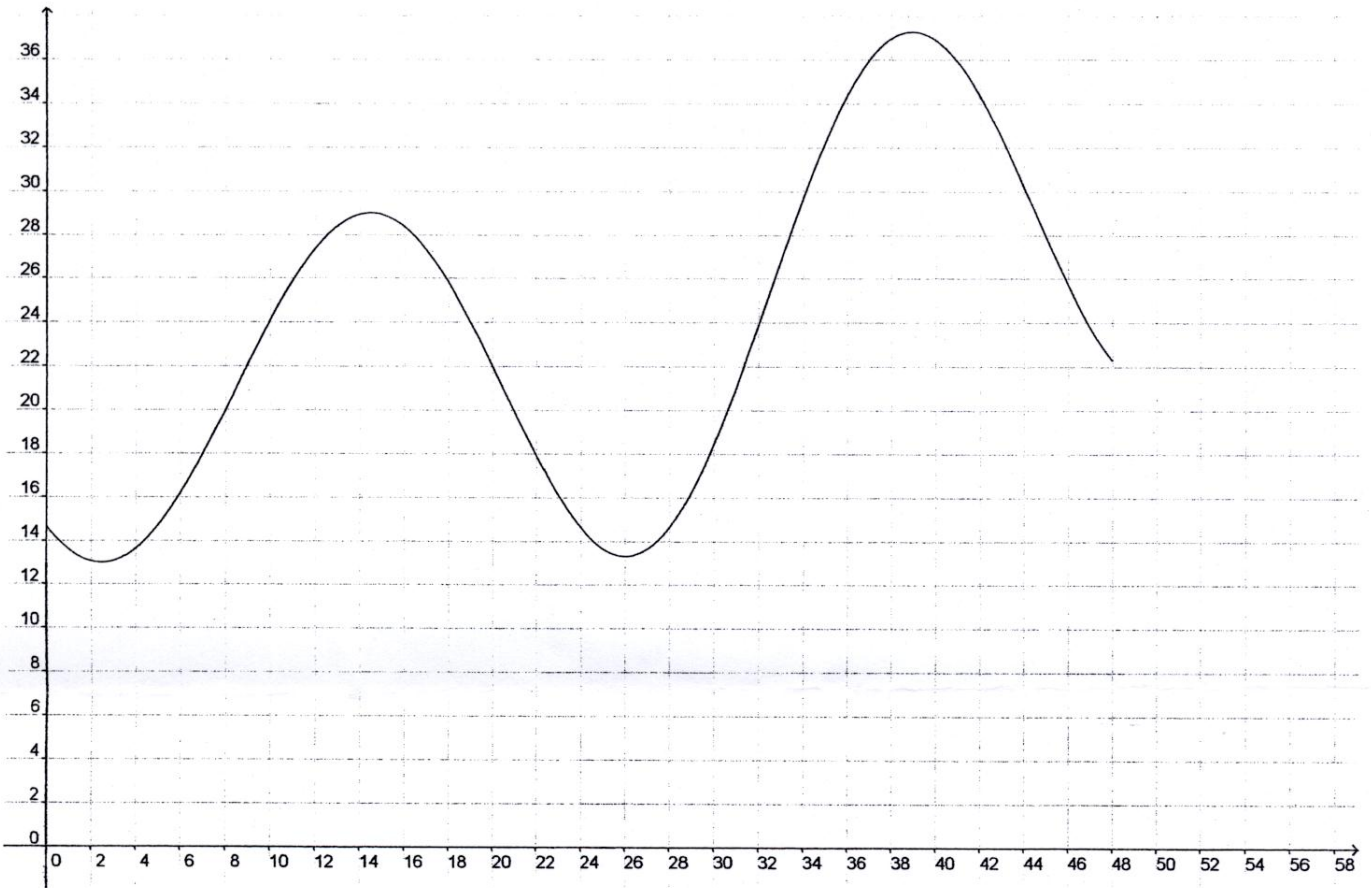
$$\begin{cases} f(24) = g(24) \\ f'(24) = g'(24) \end{cases}$$

alors on obtient que

$$a \approx 0,32$$

$$b \approx 14,94$$

b) Représentation graphique des fonctions f et g :



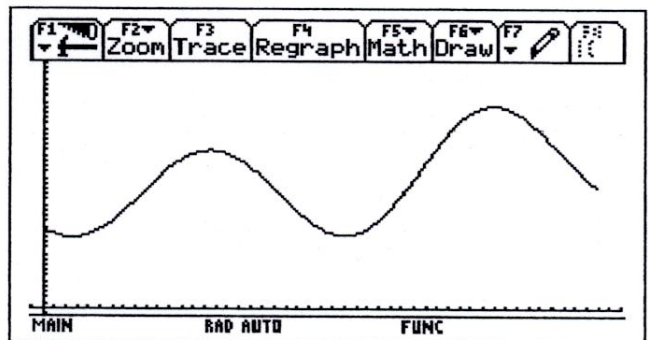
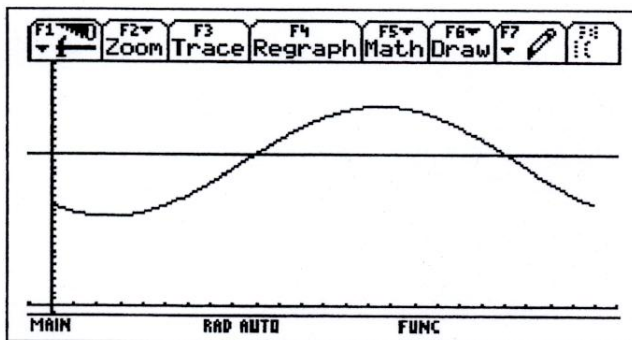
Corrigé – Mathématiques II
Problème V200
Sections C et D
(2010)

F1 ←	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrgmIO	F6 Clean Up
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (x - 8.5)\right) + 21 \rightarrow f(x)$ Done ▪ $fMin(f(x), x) 0 \leq x \leq 24$ x = 2.5 ▪ $f(2.5)$ 13. ▪ $fMax(f(x), x) 0 \leq x \leq 24$ x = 14.5 ▪ $f(14.5)$ 29. 					
f(14.5)					
MAIN RAD AUTO FUNC 5/30					

F1 ←	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrgmIO	F6 Clean Up
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\frac{1}{18-6} \cdot \int_6^{18} f(x) dx$ 25.0405 ▪ $10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (x - 8.5)\right) + a \cdot x + b \rightarrow g(x)$ Done ▪ $\frac{d}{dx}(g(x)) \rightarrow dig(x)$ Done ▪ $solve(f(24) = g(24) \text{ and } dif(24) = dig(24))$ a = .318747 and b = 14.9368 					
and dif(24)=dig(24).{a,b}					
MAIN RAD AUTO FUNC 14/30					

F1 ←	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrgmIO	F6 Clean Up
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $fMin(f(x), x) 0 \leq x \leq 24$ x = 2.5 ▪ $f(2.5)$ 13. ▪ $fMax(f(x), x) 0 \leq x \leq 24$ x = 14.5 ▪ $f(14.5)$ 29. ▪ $solve(f(x) = 22, x) 0 \leq x \leq 24$ x = 8.97872 or x = 20.0213 					
solve(f(x)=22,x) 0≤x≤24					
MAIN RAD AUTO FUNC 6/30					

F1 ←	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrgmIO	F6 Clean Up
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $solve(f(24) = g(24) \text{ and } dif(24) = dig(24))$ a = .318747 and b = 14.9368 ▪ $g(x) a = .3187467388604 \text{ and } b = 14.93678$ $10 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{12} - 2.22529\right) + .318747 \cdot x + 14.9$ ▪ $10 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{12} - 2.2252947962928\right) + .318746$ 					
88604*x+14.936784947932→g(x)					
MAIN RAD AUTO FUNC 16/30					



F1 ←	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrgmIO	F6 Clean Up
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow dif(x)$ Done ▪ $\frac{d}{dx}(dif(x)) \rightarrow d2f(x)$ Done ▪ $solve(d2f(x) = 0, x) 0 \leq x \leq 24$ x = 8.5 or x = 20.5 ▪ $dif(8.5)$ 2.0944 					
dif(8.5)					
MAIN RAD AUTO FUNC 10/30					