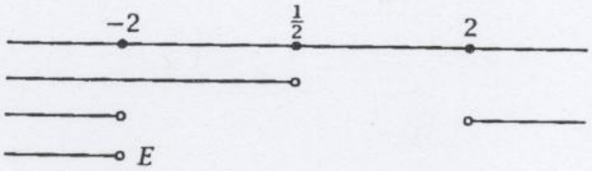
Examen I^{re} CD	Corrigé modèle de l'épreuve en mathématiques II	1

Question 1

conditions d'existence :

$1 - 2x > 0$

$x^2 - 4 > 0$



ensemble d'existence : [redacted]

5 Pour tout $x \in E$: $\log_2(1-2x) - \log_4 5 \geq \log_4(x^2-4)$

$\iff \frac{\ln(1-2x)}{\ln 2} - \frac{\ln 5}{2\ln 2} \geq \frac{\ln(x^2-4)}{2\ln 2} \mid \cdot 2\ln 2$

$\iff 2\ln(1-2x) - \ln 5 \geq \ln(x^2-4)$

$\iff 2\ln(1-2x) \geq \ln(x^2-4) + \ln 5$

$\iff \ln(1-2x)^2 \geq \ln 5(x^2-4)$

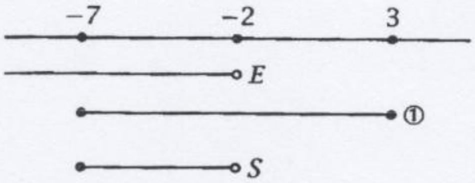
$\iff (1-2x)^2 \geq 5(x^2-4)$

$\iff 1 - 4x + 4x^2 \geq 5x^2 - 20$

$\iff -x^2 - 4x + 21 \geq 0$ ①

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (21) = 100$

$x_1 = \frac{4+10}{2\cdot(-1)} = -7 \quad x_2 = \frac{4-10}{2\cdot(-1)} = 3$



ensemble de solution : [redacted]

Question 2

6 1. $I = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^{-4x}\cos 2x\,dx$ $\quad \left| \begin{array}{ll} u(x) = e^{-4x} & u'(x) = -4e^{-4x} \\ v'(x) = \cos 2x & v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right.$

$= \left[\frac{1}{2}e^{-4x}\sin 2x\right]_0^{\frac{3\pi}{4}} - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} -2e^{-4x}\sin 2x\,dx$

$= -\frac{1}{2}e^{-3\pi} - 0 + 2\int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^{-4x}\sin 2x\,dx$ $\quad \left| \begin{array}{ll} u(x) = e^{-4x} & u'(x) = -4e^{-4x} \\ v'(x) = \sin 2x & v(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right.$

$= -\frac{1}{2}e^{-3\pi} + 2\left[-\frac{1}{2}e^{-4x}\cos 2x\right]_0^{\frac{3\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{3\pi}{4}} 2e^{-4x}\cos 2x\,dx$

$= -\frac{1}{2}e^{-3\pi} + 2\left(0 + \frac{1}{2}\right) - 4I$

D'où : $5I = -\frac{1}{2}e^{-3\pi} + 1$ c.-à-d. [redacted]

4 2. $\int_1^e [\ln(ex)]^2\,dx$ $\quad \left| \begin{array}{ll} u(x) = (\ln(ex))^2 & u'(x) = 2\ln(ex)\cdot\frac{1}{ex}\cdot e = \frac{2}{x}\ln(ex) \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{array} \right.$

$= \left[x(\ln(ex))^2\right]_1^e - \int_1^e 2\ln(ex)\,dx$

$= e\left(\ln(e^2)\right)^2 - (\ln(e))^2 - \int_1^e 2\ln(ex)\,dx$ $\quad \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln(ex) & u'(x) = \frac{1}{ex}\cdot e = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 2 & v(x) = 2x \end{array} \right.$

$= 4e - 1 - \left[2x\ln(ex)\right]_1^e + \int_1^e 2\,dx$

$= 4e - 1 - \left(2e\ln(e^2) - 2\ln(e)\right) + \left[2x\right]_1^e$

$= 4e - 1 - 4e + 2 + 2e - 2$

$=$ [redacted]

4 3. $x \in \text{dom} f \iff x^3 - x^2 + 4x - 4 \neq 0 \iff (x-1)(x^2+4) \neq 0 \iff x \neq 1 \qquad \text{dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$

La primitive F est cherchée sur l'intervalle [redacted] qui contient 0.

$\forall x \in I,\quad F(x) = \int \frac{-2x^2+x-9}{x^3-x^2+4x-4}\,dx \overset{\text{V200}}{=} \int\left(\frac{1}{x^2+4} - \frac{2}{x-1}\right)dx = \int\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} - 2(x-1)^{-1}\right)dx$

$= \int\left(\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{2} - 2(x-1)^{-1}\right)dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln|\underbrace{x-1}_{<0}| + C$

$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln(1-x) + C$

Or, $F(0) = 2 \iff \frac{1}{2}\arctan(0) - 2\ln(1) + C = 2 \iff C = 2$.

Ainsi $F(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln(1-x) + 2$ sur I

Question 3

3 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln 2}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left(x\cdot\ln\left(1-\frac{\ln 2}{x}\right)\right)$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1-\frac{\ln 2}{x}\right)$ en posant $t = \frac{\ln 2}{x}$ c.-à-d. $x = \frac{\ln 2}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln 2\cdot\ln(1-t)}{t} \overset{R.H.}{=} \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln 2\cdot\frac{1}{1-t}\cdot(-1)}{1} = -\ln 2$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln 2}{x}\right)^x = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$

3 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2^x-1)}{x} \overset{R.H.}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2^x-1}\cdot 2^x\cdot\ln 2}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x\cdot\ln 2}{2^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 2}{1-2^{-x}} = \dfrac{\ln 2}{1} = \ln 2$

Question 4

3 1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}\underbrace{(2x^2-x-1)}_{\to+\infty} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}\underbrace{(2x-1-\frac{1}{x})}_{\to+\infty} = +\infty.$

Donc : B.P. dir. yy' en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\underbrace{(2x^2-x-1)}_{\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x-1}{e^x} \overset{R.H.}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{e^x} \overset{R.H.}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x} = 0.$

Donc : A.H. $y = 0$ en $+\infty$

4 2. f est dérivable sur $\operatorname{dom} f$. D'où : $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) = e^{-x}\cdot(-1)\cdot(2x^2-x-1) + e^{-x}\cdot(4x-1) = e^{-x}(-2x^2+x+1+4x-1)$
$= e^{-x}(-2x^2+5x)$

valeurs critiques : $f'(x) = 0 \iff -2x^2+5x = 0 \iff x(-2x+5) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{5}{2}$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$9e^{-\frac{5}{2}}$	$\searrow$	0

4 3. f' est dérivable sur $\operatorname{dom} f'$. D'où : $\operatorname{dom} f'' = \operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f''(x) = e^{-x}\cdot(-1)\cdot(-2x^2+5x) + e^{-x}\cdot(-4x+5) = e^{-x}(2x^2-5x-4x+5)$
$= e^{-x}(2x^2-9x+5)$

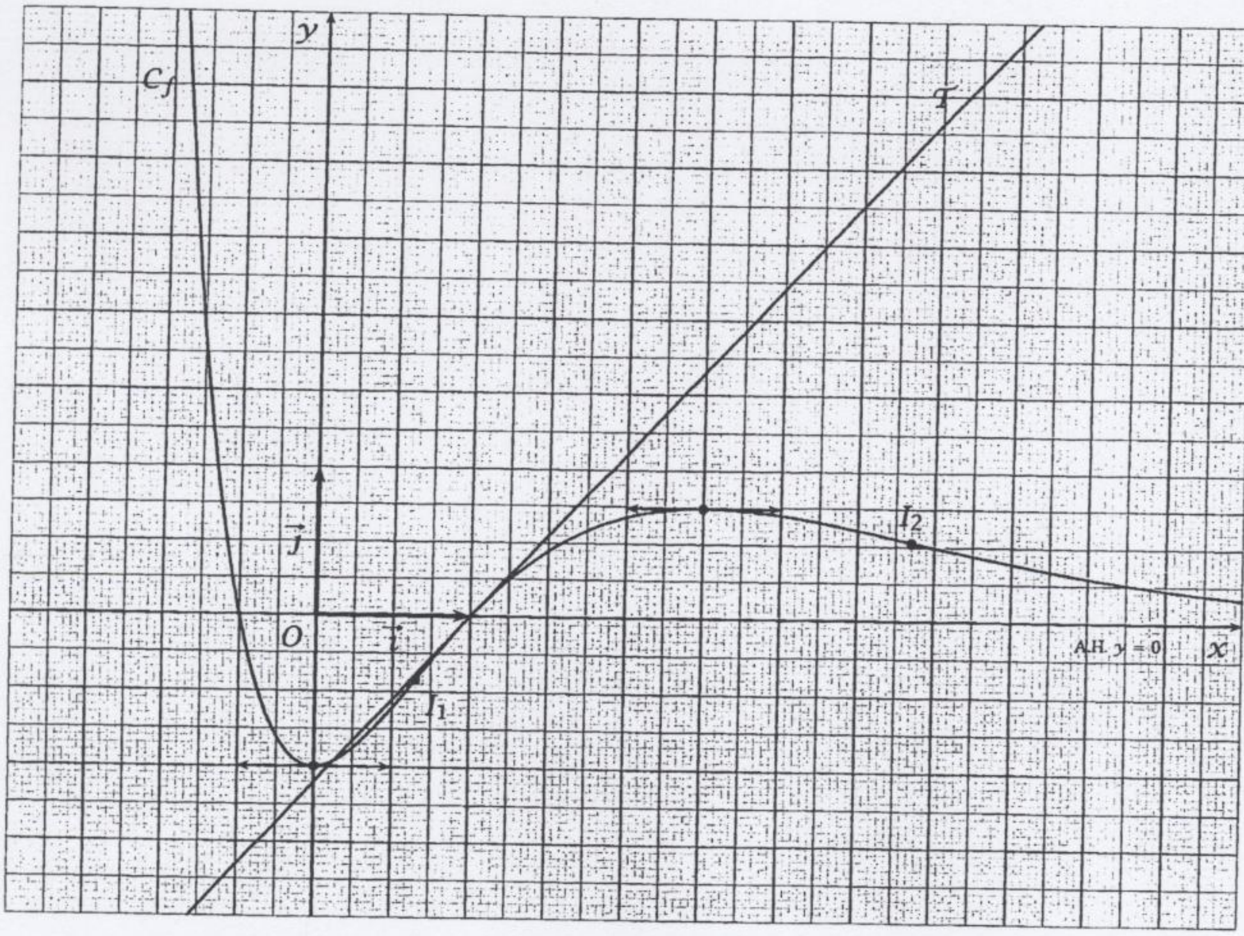
valeurs critiques : $f''(x) = 0 \iff 2x^2-9x+5 = 0 \iff x = x_1 = \frac{9-\sqrt{41}}{4}$ ou $x = x_2 = \frac{9+\sqrt{41}}{4}$

Tableau de concavité :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
C_f		$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I.	$\smile$	

2 4. $\mathcal{T} : y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \iff y - 0 = \frac{3}{e}(x-1)$ D'où : $\mathcal{T} : y = \frac{3}{e}x - \frac{3}{e}$

3 5.



4 6. $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 1$

$$I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} e^{-x}(2x^2 - x - 1)\,dx \qquad \left| \begin{array}{ll} u(x) = 2x^2 - x - 1 & u'(x) = 4x - 1 \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{array} \right.$$

$$= \left[e^{-x}(-2x^2 + x + 1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} e^{-x}(4x - 1)\,dx \qquad \left| \begin{array}{ll} u(x) = 4x - 1 & u'(x) = 4 \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{array} \right.$$

$$= \left[e^{-x}(-2x^2 + x + 1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \left[e^{-x}(-4x + 1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} 4e^{-x}\,dx$$

$$= \left[e^{-x}(-2x^2 + x + 1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \left[e^{-x}(-4x + 1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \left[-4e^{-x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left[e^{-x}(-2x^2 - 3x - 2)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{7}{e} + \sqrt{e} < 0$$

$$I_2 = \int_{1}^{2} e^{-x}(2x^2 - x - 1)\,dx = \left[e^{-x}(-2x^2 - 3x - 2)\right]_{1}^{2} = -16e^{-2} + \frac{7}{e} > 0$$

Aire cherchée : $\mathcal{A} = |I_1| + |I_2| = \frac{7}{e} - \sqrt{e} - 16e^{-2} + \frac{7}{e} = \frac{14}{e} - \sqrt{e} - 16e^{-2}$u.a

$= 4(\frac{14}{e} - \sqrt{e} - 16e^{-2})\text{cm}^2 \approx 5{,}34\text{cm}^2$

a) Paroi du Tunnel : C_f

Fonction polynôme f définie par $f(x) = -ax^2 + bx + c$

- $a > 0$, comme C_f a sa concavité tournée vers le bas.
- Points de contact dans le repère du schéma : $P(-2;4)$ et $Q(2;4)$

$P \in C_f$ et $Q \in C_f \Leftrightarrow f(-2) = f(2) = 4 \Leftrightarrow b = 0$ et $c = 4a + 4$

D'où la paroi du tunnel est représentée par : $f(x) = -ax^2 + 4a + 4 \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$

b) • Recherche des abscisses des points d'intersection de la paroi du tunnel avec le sol :

$$f(x) = 0 \text{ avec } a > 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{\frac{a+1}{a}} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

• Aire de la surface comprise entre le tunnel et le sol :

$$A_t = \int_{-2\sqrt{\frac{a+1}{a}}}^{2\sqrt{\frac{a+1}{a}}} f(x)\,dx = \frac{32}{3}\sqrt{\frac{(a+1)^3}{a}}$$

c) L'aire de la surface inutile vaut A_t moins l'aire de la surface du passage carré :

$$A(a) = A_t - 16 = \frac{32}{3}\sqrt{\frac{(a+1)^3}{a}} - 16$$

d) Pour déterminer un minimum de A, cherchons les racines et le signe de $A'(a)$:

$$A'(a) = \frac{16}{3}\cdot(2a-1)\cdot\sqrt{\frac{a+1}{a^3}} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

$A'(a) = 0$ avec $a > 0 \Leftrightarrow a = 0.5$

La racine est unique et en plus

a	0		0.5		$+\infty$
$A'(a)$	‖	$-$	0	$+$	

Donc pour $a = 0,5$ l'aire de la surface inutile est minimale.

e) La forme optimale du tunnel est définie par : $f(x) = -0.5x^2 + 6$

Aire de la surface du tunnel : $A_t \simeq 27.71\ m^2$
Aire de la surface inutile : $A(0.5) \simeq 11.71\ m^2$

L'aire de la surface inutile représente environ 42% de l'aire totale

tition des

- Communication / Argumentation : 3+3 → 6
- Résolution / Comp. disciplinaires : 2+7 → 9