Mathématiques II, section : C et D

Question 1

① voir livre

② $\log_{0,5}(-2x^2+7x-3) + \log_2(6-2x) \leq 1 \quad (*)$

- cond : $-2x^2+7x-3>0$ et $6-2x>0$

  $(2x-1)(3-x)>0 \qquad x<3$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & \frac{1}{2} & & 3 & \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

d'où : $x \in \left]\frac{1}{2};3\right[$

- $\forall x \in \left]\frac{1}{2};3\right[$:

  $\log_{0,5}(-2x^2+7x-3) + 1 + \log_2(3-x) \leq 1$

  $\log_{0,5}(-2x^2+7x-3) - \log_{0,5}(3-x) \leq 0$

  $\log_{0,5}(-2x^2+7x-3) \leq \log_{0,5}(3-x)$; $\log_{0,5}$ bij. $\searrow$

  $-2x^2+7x-3 \geq 3-x$

  $-2x^2+8x-6 \geq 0$

  $-2(x-1)(x-3) \geq 0$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & 1 & & 3 & \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

d'où : $S = [1;3[$

③ $\dfrac{2^x+4}{2^{x-1}+2} = 2^{x+1}$

- cond : /

- $\forall x \in \mathbb{R}$: $2^x+4 = 2^{x+1}\left(2^{x-1}+2\right)$

  $2^x+4 = 2^{2x}+4\cdot 2^x$

  $2^{2x}+3\cdot 2^x-4=0$

poser $u=2^x$, alors l'équation s'écrit :

$$u^2 + 3u - 4 = 0$$
$$(u-1)(u+4) = 0$$
$$u = 1 \quad \text{ou} \quad u = -4$$
càd : $2^x = 1$ ou $2^x = -4$ impossible

$$2^x = 2^0$$
$$x = 0 \checkmark$$

et $S = \{0\}$

Question 2

① $$A = \int_0^{1/2} \frac{\arctan(2x)}{x^2 + \frac{1}{4}} \, dx$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1}{\frac{4x^2+1}{4}} \cdot \arctan(2x) \, dx$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{4}{1+(2x)^2} \cdot \arctan(2x) \, dx$$

$$= 2 \int_0^{1/2} \underbrace{\frac{2}{1+(2x)^2}}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan(2x)}_{u} \, dx$$

$$= \left[(\arctan(2x))^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = (\arctan 1)^2 - (\arctan 0)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{16}$$

② $$B = \int \cos x \cdot \ln(1+\cos x) \, dx$$

Ipp : $\begin{cases} u(x) = \ln(1+\cos x) & v'(x) = \cos x \\ u'(x) = \dfrac{-\sin x}{1+\cos x} & v(x) = \sin x \end{cases}$

d'où : $B = \sin x \ln(1+\cos x) + \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx$

$= \sin x \ln(1+\cos x) + \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,dx$

$= \sin x \ln(1+\cos x) + \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}\,dx$

$= \sin x \ln(1+\cos x) + \int (1-\cos x)\,dx$

$= \sin x \ln(1+\cos x) + x - \sin x + k, \ k \in \mathbb{R}$

③ $f(x) = e^{-x}(\cos^2 x - \sin^2 x) = e^{-x}\cos 2x$

- $I = \int f(x)\,dx = \int e^{-x}\cos 2x\,dx$

Ipp : $\begin{cases} u(x) = \cos 2x & v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = -2\sin 2x & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$I = -e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\sin 2x\,dx$

Ipp : $\begin{cases} u(x) = \sin 2x & v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = 2\cos 2x & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$I = -e^{-x}\cos 2x - 2\left[-e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\,dx\right]$

$I = -e^{-x}\cos 2x + 2e^{-x}\sin 2x - 4I + k'$

$5I = e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) + k'$

$I = \frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) + k, \ k \in \mathbb{R}$

- d'où : $F(x) = \frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) + k, \ k \in \mathbb{R}$

cond : $F(0) = 0 \iff \frac{1}{5}\cdot(-1) + k = 0 \iff k = \frac{1}{5}$

et la primitive F recherchée vaut

$$F(x) = \frac{1}{5} e^{-x} (2\sin 2x - \cos 2x) + \frac{1}{5} \quad (\text{avec } x \in \mathbb{R})$$

Question 3

$$f(x) = -x + 2 - \frac{e^x - 1}{e^x} \quad = -x + 2 - 1 + e^{-x} \quad = -x + 1 + e^{-x}$$

① cond: /

(0,5 pt) $\text{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

② • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\underbrace{-x}_{\to +\infty} + 2 - \underbrace{\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)}_{\to -\infty} \right) = +\infty$ $\cancel{\text{A.H.}}$

(0,5 pt)

• Recherche d'une A.O. éventuelle à gauche :

(2,5 pts)

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - \frac{\overbrace{\frac{e^x - 1}{e^x}}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to -\infty}} \right)$ f.i.

calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{1 - e^{-x}}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to -\infty}}$

$\underset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{+e^{-x}}{1} = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - \overbrace{\frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{x}}^{\to +\infty} \right) = -\infty$

B.P. de direction (Oy)

③ • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{-x}_{\to -\infty} + 2 - \frac{\overbrace{e^x - 1}^{\to +\infty}}{\underbrace{e^x}_{\to +\infty}} \right)$ f.i.

(1,5 pts) $= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x + 2 - 1 + e^{-x} \right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{-x}_{\to -\infty} + 1 + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \right) = -\infty$ $\cancel{\text{A.H.}}$

(3 pts) • Recherche d'une A.O. éventuelle à droite :

comme $f(x) = -x+1+\varphi(x)$ avec $\varphi(x) = e^{-x}$

(voir calcul précédent) et comme $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

alors $\mathcal{C}_f$ admet à droite une $\boxed{\text{A.O. } y = -x+1}$

• Position $\mathcal{C}_f$ / A.O. pour $x \geq 0$

(1 pt) $\forall x \geq 0$: $f(x) - y_{A.O.} = \varphi(x) = e^{-x} > 0$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de A.O.

Question 4

$f(x) = x - 1 - 2 \ln \frac{x}{x+1}$

① a) cond : $x \neq -1$ et $\frac{x}{x+1} > 0$

	-1		0	
$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

(1 pt) $\text{dom} f =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[= \text{dom}_c f$

b) • $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\underset{\downarrow -\infty}{x} - 1 - 2 \underbrace{\ln \overset{\nearrow 1}{\frac{x}{x+1}}}_{\to 0} \right) = -\infty$ $\cancel{\text{A.H.}}$

(1 pt) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underset{\downarrow +\infty}{x} - 1 - 2 \underbrace{\left(\ln \frac{x}{x+1} \right)}_{\to 0} \right) = +\infty$ $\cancel{\text{A.H.}}$

(1 pt) • $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} \left(x - 1 - 2 \underbrace{\ln \overset{\nearrow +\infty}{\frac{x}{x+1}}}_{+\infty} \right) = -\infty$

$\boxed{\text{A.V. } x = -1}$

(1 pt) • $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x - 1 - 2 \underbrace{\ln \overset{\nearrow 0^+}{\frac{x}{x+1}}}_{-\infty} \right) = +\infty$

$\boxed{\text{A.V. } x = 0}$

• Recherche d'une A.O. éventuelle à gauche et à droite

(2,5pts)

Comme $f(x) = x-1+\varphi(x)$ avec $\varphi(x) = -2\ln\frac{x}{x+1}$

et comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x) = 0$, alors $\mathcal{C}_f$ admet (à gauche et à droite) une $\boxed{A.O.\ y = x-1}$

• Position $\mathcal{C}_f$ / A.O.

(1,5pts)

$\forall x \in \text{dom} f$: $f(x) - y_{A.O.} = \varphi(x) = -2\ln\frac{x}{x+1}$

$f(x) - y_{A.O.} = 0$ pour $-2\ln\frac{x}{x+1} = 0$

$\frac{x}{x+1} = 1$

$x = x+1$ imp.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-y_{A.O.}$		$-$	‖		‖	$+$	

si $x \in]-\infty ; -1[$: $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de A.O.

si $x \in]0 ; +\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de A.O.

c) • $\text{dom} f' = \text{dom} f$

(2pts)

• $f'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2}$

$= 1 - \frac{2}{x(x+1)} = \frac{x^2+x-2}{x(x+1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x+1)}$ $x(x+1) > 0$

$f'(x) = 0$ pour $x = 1$ ✓ ou $x = -2$ ✓

d) • $\text{dom} f'' = \text{dom} f$

(2pts)

• $f''(x) = 0 + 2 \cdot \frac{1(x+1) + x\cdot 1}{x^2(x+1)^2} = \frac{2\cdot(2x+1)}{x^2(x+1)^2}$ $x^2(x+1)^2 > 0$

$f''(x) = 0$ pour $x = -\frac{1}{2}$ impossible

e) tdv.

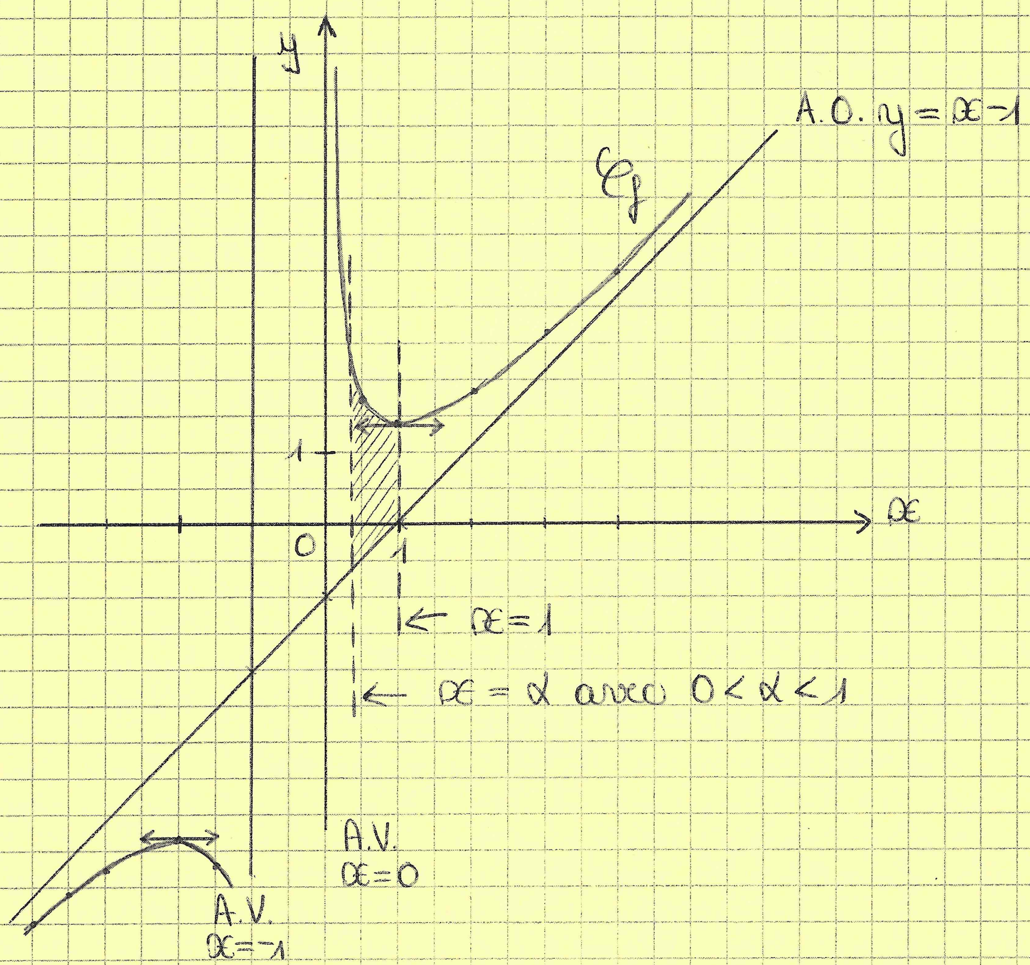
(1pt)

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||		||	$-$	0	$+$	
$f''(x)$			$-$		||		||		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$ $-\infty$	||		|| $+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2) = -3 - 2\ln 2 \cong -4{,}4$

$f(1) = 2\ln 2 \cong 1{,}4$

②



③ a) $\mathcal{A}(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 \left(f(x) - y_{A.O.}\right) dx = \int_\alpha^1 -2\ln\frac{x}{x+1}\, dx$

$= 2\displaystyle\int_1^\alpha \ln\frac{x}{x+1}\, dx$

$$\text{Ipp}: \begin{cases} u(x) = \ln \frac{x}{x+1} & v'(x) = 1 \\ u'(x) = \frac{1}{x(x+1)} & v(x) = x \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = 2\left[x \ln \frac{x}{x+1}\right]_1^\alpha - 2\int_1^\alpha \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 2\left[x \ln \frac{x}{x+1}\right]_1^\alpha - 2\left[\ln|x+1|\right]_1^\alpha$$

$$= 2\left(\alpha \ln \frac{\alpha}{\alpha+1} - \ln\frac{1}{2}\right) - 2\left(\ln|\alpha+1| - \ln 2\right)$$

$$= 4\ln 2 + 2\alpha \ln \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2\ln|\alpha+1| \quad \text{u.a } (cm^2)$$

$$= 4\ln 2 + 2\alpha \ln \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2\ln(\alpha+1) \quad [\text{comme } 0 < \alpha < 1]$$

b) $$\lim_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0^+} \left(4\ln 2 + 2\alpha \ln \frac{\overset{>0}{\alpha}}{\underset{>0}{\alpha+1}} - 2\ln(\alpha+1)\right)$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \Big(4\ln 2 + 2\underbrace{\alpha \ln\alpha}_{\to 0\ (*)} - 2\underbrace{\alpha}_{\to 0}\underbrace{\ln(\alpha+1)}_{\to 0} - 2\underbrace{\ln(\alpha+1)}_{\to 0}\Big)$$

$$= 4\ln 2 \quad \text{u.a. } (cm^2)$$

$$(*) \lim_{\alpha \to 0^+} (\alpha \ln \alpha) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\overset{\to -\infty}{\ln \alpha}}{\underset{\to +\infty}{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$\underset{(H)}{=} \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{1}{\alpha^2}}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} (-\alpha) = 0$$