Examen de fin d'études secondaires 2014 – Mathématiques II (sections C et D) – Corrigé

Exercice 1

(3+4+6=13 points)

1) Démontrer que $(\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}), (\forall x \in]0;+\infty[), (\forall r \in \mathbb{R})$: $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[)$, soit : $y = \log_a(x)$. Alors :

$\log_a(x) = y$

$\Leftrightarrow x = a^y$ *(exp$_a$ est la bijection réciproque de log$_a$)*

$\Leftrightarrow x^r = (a^y)^r$ *(en élevant les deux membres à la puissance r)*

$\Leftrightarrow x^r = a^{r\cdot y}$ *(puissance d'une puissance)*

$\Leftrightarrow \log_a(x^r) = r \cdot y$ *(log$_a$ est la bijection réciproque de exp$_a$)*

$\Leftrightarrow \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

3p

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3(e^x+1) = 2e^{-x}\cdot(1-e^x)$

$3(e^x+1) = 2e^{-x}\cdot(1-e^x)$

$\Leftrightarrow 3e^x + 3 = 2e^{-x} - 2$

$\Leftrightarrow 3e^x + 5 - 2e^{-x} = 0 \qquad |\cdot e^x \neq 0$

$\Leftrightarrow 3e^{2x} + 5e^x - 2 = 0 \qquad$ posons : $e^x = t > 0$

$\Leftrightarrow 3t^2 + 5t - 2 = 0 \qquad \Delta = 25 + 24 = 49$

$\Leftrightarrow t = \frac{-5-7}{6}$ ou $t = \frac{-5+7}{6}$

$\Leftrightarrow \underbrace{t=-2}_{\substack{\text{à écarter}\\ \text{car } t>0}}$ ou $t = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\ln(3) \qquad \boldsymbol{S = \{-\ln(3)\}}$

4p

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\log_{\frac{1}{5}}(5-x) + \log_5(2x-1) \leq \frac{1}{2}\cdot\log_{\sqrt{5}}(x+3)$

Conditions d'existence :

$5 - x > 0$ et $2x - 1 > 0$ et $x + 3 > 0$

$\Leftrightarrow x < 5$ et $x > \frac{1}{2}$ et $x > -3$

Domaine :

$\boldsymbol{D = \left]\frac{1}{2};5\right[}$

$(\forall x \in D)$:

$\log_{\frac{1}{5}}(5-x) + \log_5(2x-1) \leq \frac{1}{2}\cdot\log_{\sqrt{5}}(x+3)$

$\Leftrightarrow \frac{\log_5(5-x)}{\log_5(5^{-1})} + \log_5(2x-1) \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_5(x+3)}{\log_5\left(5^{\frac{1}{2}}\right)}$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_5(5-x)}{-1} + \log_5(2x-1) \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_5(x+3)}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow -\log_5(5-x) + \log_5(2x-1) \leq \log_5(x+3)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(2x-1) \leq \log_5(x+3) + \log_5(5-x)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(2x-1) \leq \log_5[(x+3)(5-x)]$$

$$\overset{\text{bij}\nearrow}{\Leftrightarrow}\ 2x-1 \leq (x+3)(5-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 \leq 5x - x^2 + 15 - 3x$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 16 - x^2 \qquad (I)$$

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$16-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $\mathcal{S}_{(I)} = [-4;4]$

En tenant compte des conditions d'existence, on obtient :

$$\mathcal{S} = D \cap \mathcal{S}_{(I)} = \left]\frac{1}{2};5\right[\cap [-4;4] = \left]\frac{1}{2};\mathbf{4}\right]$$

6p

Exercice 2 **(3+4=7 points)**

Calculer, en justifiant, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(2x)}{\log(1-x)} \qquad \left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\ f.i.\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+4x^2}}{\frac{1}{\ln(10)}\cdot\frac{-1}{1-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{1+4x^2}\cdot\frac{(1-x)\cdot\ln(10)}{-1}\right)$$

$$= 2\cdot(-\ln(10))$$

$$= \mathbf{-2\ln(10)}$$

3p

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-1}\right)^{6x} \qquad (1^\infty\ f.i.)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1+5}{3x-1}\right)^{6x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-1}+\frac{5}{3x-1}\right)^{6x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{3x-1}\right)^{6x}$$

Posons : $\frac{1}{t} = \frac{5}{3x-1} \Leftrightarrow 3x = 5t+1$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2\cdot(5t+1)}$$

Si $x \to +\infty$, alors $t \to +\infty$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{10t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2}\right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{10}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2}$$

$$= e^{10}\cdot 1^2$$

$$= \boldsymbol{e^{10}}$$

4p

Exercice 3 **(3+4+1+2+2+5=17 points)**

1) $f(x) = x^3 \cdot \ln(x) - x^3 = x^3 \cdot (\ln(x) - 1)$

<u>**Domaine :**</u>

Condition d'existence : $x > 0$ $\quad$ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$

<u>**Limites et branches infinies :**</u>

<u>**Pour $x \to 0^+$**</u>

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^3 \cdot (\ln(x) - 1) \quad (\text{"}0\cdot(-\infty)\text{"}\ f.i.)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x) - 1}{\frac{1}{x^3}} \quad \left(\text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"}\ f.i.\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4}{-3x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-3}$$

$$= 0^-$$

<u>**Pour $x \to +\infty$**</u>

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x^3 \cdot (\ln(x) - 1) \quad (\text{"}+\infty\cdot(+\infty)\text{"})$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3\cdot(\ln(x) - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x^2 \cdot (\ln(x) - 1) \quad (\text{"}+\infty\cdot(+\infty)\text{"})$$

$$= +\infty$$

La courbe C_f de f admet une **branche parabolique (B.P.)** (à droite) **suivant la direction de l'axe des ordonnées** (Oy).

$\boxed{3p}$

2) <u>**Dérivée :**</u>

$(\forall x \in \operatorname{dom} f' =]0; +\infty[)$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot (\ln(x) - 1) + x^3 \cdot \frac{1}{x}$$
$$= 3x^2 \cdot (\ln(x) - 1) + x^2$$
$$= x^2 \cdot [3(\ln(x) - 1) + 1]$$
$$= \underbrace{\boldsymbol{x^2}}_{>0} \cdot (\mathbf{3\ln(x) - 2})$$

<u>Racine(s) de la dérivée :</u>

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (3\ln(x) - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ou } \ln(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\substack{\text{à écarter} \\ \text{car} \notin \operatorname{dom} f'}} \quad \text{ou } x = \underbrace{e^{\frac{2}{3}}}_{\approx 1{,}95}$$

<u>Tableau des variations :</u>

x	0		$e^{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	*min*	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet un **minimum en $x = e^{\frac{2}{3}}$**, égal à :

$$f\left(e^{\frac{2}{3}}\right) = \left(e^{\frac{2}{3}}\right)^3 \cdot \left(\ln\left(e^{\frac{2}{3}}\right) - 1\right) = e^2\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{1}{3}e^2 \approx -2{,}46$$

$\boxed{4p}$

3) **Intersection avec (Ox) :**

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 \cdot (\ln(x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\substack{\text{à écarter} \\ \text{car } \notin \text{ dom } f}} \quad \text{ou } x = e$$

$\mathcal{C}_f \cap (Ox) = \{A\}$ avec $A(e; f(e)) = \boldsymbol{A(e;0)}$ 1p

4) **Equation de la tangente t_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse 1 :**

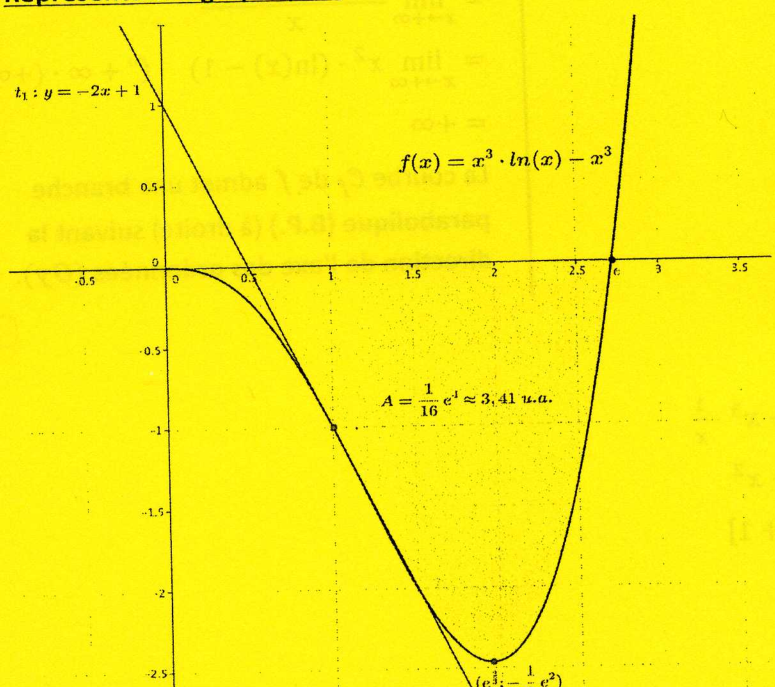
$t_1 \equiv y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$ avec :

$f(1) = 1^3 \cdot (\ln(1) - 1) = -1$ et $f'(1) = 1^2 \cdot (3\ln(1) - 2) = -2$

D'où :

$t_1 \equiv y = -2 \cdot (x-1) + (-1) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -2x + 1}$ 2p

5) **Représentation graphique :**



2p

6) Comme la fonction f est négative sur $]0; e]$, on a :

$$\mathcal{A}(\lambda) = -\int_\lambda^e f(x)\,dx = \int_e^\lambda f(x)\,dx$$

$$= \int_e^\lambda x^3 \cdot (\ln(x) - 1)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 \cdot (\ln(x) - 1)\right]_e^\lambda - \int_e^\lambda \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

IPP avec :

$u(x) = \ln(x) - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^3 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{4}x^4$

$$= \left[\frac{1}{4}\lambda^4 \cdot (\ln(\lambda) - 1) - 0\right] - \frac{1}{4}\int_e^\lambda x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\lambda^4 \cdot (\ln(\lambda) - 1) - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{4}x^4\right]_e^\lambda$$

$$= \frac{1}{4}\lambda^4 \ln(\lambda) - \frac{1}{4}\lambda^4 - \frac{1}{16}(\lambda^4 - e^4)$$

$$= \frac{1}{4}\lambda^4 \ln(\lambda) - \frac{1}{4}\lambda^4 - \frac{1}{16}\lambda^4 + \frac{1}{16}e^4$$

$$= \frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{4}\lambda^4 \ln(\lambda) - \frac{5}{16}\lambda^4$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{4}\lambda^4\left(\ln(\lambda) - \frac{5}{4}\right)}$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} \mathcal{A}(\lambda)$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{4}\lambda^4 \cdot \left(\ln(\lambda) - \frac{5}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\lim_{\lambda\to 0}\left[\lambda^4 \cdot \left(\ln(\lambda) - \frac{5}{4}\right)\right]}_{=0}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{16}e^4} \approx 3{,}41 \text{ u. a.}$$

5p

Exercice 4 **(3+4=7 points)**

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln(2x)}{2^x - 4}$$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f et montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

Conditions d'existence :

$$2x > 0 \quad \text{et} \quad 2^x - 4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \quad \text{et} \quad 2^x \neq 2^2$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 2$$

$$\mathbf{dom}\, \boldsymbol{f} =]0; +\infty[\setminus \{2\}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x - 3)]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2x - 3 + \frac{\ln(2x)}{2^x - 4} - (2x - 3)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{2^x - 4} \qquad \left(\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}\ f.i.\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{2^x \cdot \ln(2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x \cdot 2^x \cdot \underbrace{\ln(2)}_{>0}}$$

$$= 0^+$$

Donc la droite Δ d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

3p

2) Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f par rapport à son asymptote oblique Δ sur tout le domaine de la fonction.

Soient $M(x; f(x)) \in \mathcal{C}_f$ et $P(x; y) \in \Delta$, alors :

$$\overline{PM} = f(x) - y$$

$$= 2x - 3 + \frac{\ln(2x)}{2^x - 4} - (2x - 3) = \frac{\ln(2x)}{2^x - 4}$$

signe de $\overline{PM}$:

x	0		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$\ln(2x)$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$
$2^x - 4$	$\|$	$-$		$-$	0	$+$
$\overline{PM}$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$
position	$\|$	$\mathcal{C}_f / \Delta$	Intersection $\left(\frac{1}{2};-2\right)$	$\Delta / \mathcal{C}_f$	$\|$	$\mathcal{C}_f / \Delta$

4p

Exercice 5 **(6+4=10 points)**

IPP avec :
$u(x) = \sin(4x) \Rightarrow u'(x) = 4\cos(4x)$
$v'(x) = e^{-2x} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\boldsymbol{I(x) = \int e^{-2x} \cdot \sin(4x)\ dx}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(4x) - \left(-\frac{4}{2}\right)\int e^{-2x} \cdot \cos(4x)\ dx$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(4x) + 2\int e^{-2x} \cdot \cos(4x)\ dx$$

IPP avec :
$u_1(x) = \cos(4x) \Rightarrow u_1'(x) = -4\sin(4x)$
$v_1'(x) = e^{-2x} \Rightarrow v_1(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(4x)$$
$$+2\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(4x) - 2\underbrace{\int e^{-2x} \cdot \sin(4x)\ dx}_{I(x)}\right]$$

Donc :

$$I(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(4x) - e^{-2x}\cos(4x) - 4 \cdot I(x) + k$$
$$\Leftrightarrow 5 \cdot I(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(4x) - e^{-2x}\cos(4x) + k$$
$$\Leftrightarrow I(x) = -\frac{1}{10}e^{-2x}\sin(4x) - \frac{1}{5}e^{-2x}\cos(4x) + k'$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{I(x) = -\frac{1}{10}e^{-2x}(\sin(4x) + 2\cos(4x)) + k'} \quad \text{avec } k, k' \in \mathbb{R}$$

Comme :

$$I\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{10}e^{-\pi}\left(\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} + 2\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}\right) + k' = -\frac{1}{5}e^{-\pi} + k'$$
$$I(0) = -\frac{1}{10}e^{0}\left(\underbrace{\sin(0)}_{=0} + 2\underbrace{\cos(0)}_{=1}\right) + k' = -\frac{1}{5} + k'$$

On en déduit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{e^{-2x} \cdot \sin(4x)\ dx} = I\left(\frac{\pi}{2}\right) - I(0) = -\frac{1}{5}e^{-\pi} + \frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{1}{5}}(1 - e^{-\pi}) \approx 0{,}19$$

6p

$$\int \frac{\mathbf{5x-3}}{\sqrt{\mathbf{9-x^2}}}\,\mathbf{dx} = \int \frac{5x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx - \int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

$$= 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int -2x\cdot(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx - 3\int \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx$$

$$= -\frac{5}{2}\cdot\frac{(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 3\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + k$$

$$= \mathbf{-5\sqrt{9-x^2} - 3\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + k \quad , k \in \mathbb{R}}$$

4p

Exercice 6 **(2+4=6 points)**

$$f(x) = \frac{3x^3-6x^2+4x+3}{(x-1)^2}$$

1) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}) : f(x) = ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$\frac{3x^3-6x^2+4x+3}{(x-1)^2} = ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \qquad |\cdot(x-1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-6x^2+4x+3 = ax\cdot(x-1)^2 + b\cdot(x-1) + c$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-6x^2+4x+3 = ax(x^2-2x+1) + bx - b + c$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-6x^2+4x+3 = ax^3 - 2ax^2 + ax + bx - b + c$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-6x^2+4x+3 = ax^3 - 2ax^2 + (a+b)x + (c-b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ -2a = -6 \\ a+b = 4 \\ c-b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a = 3} \\ \mathbf{b = 1} \\ \mathbf{c = 4} \end{cases} \qquad \text{Donc : } f(x) = 3x + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$$

2p

2) Déterminer sur un intervalle I à préciser la primitive F de f qui prend la valeur 7 en $x = 0$.

dom $f = \mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. Comme $0 \in]-\infty; 1[$, on calcule la primitive sur $I =]-\infty; 1[$.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int 3x\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \ln(|x-1|) - \frac{4}{x-1} + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

On a :

$$F(0) = 7 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot 0 + \ln(|-1|) - \frac{4}{-1} + k = 7 \Leftrightarrow \ln(1) + 4 + k = 7 \Leftrightarrow 4 + k = 7 \Leftrightarrow k = 3$$

D'où la primitive cherchée :

$$\mathbf{F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln(1-x) - \frac{4}{x-1} + 3 \quad \text{sur } I =]-\infty; 1[}$$

4p