Examen de fin d'études secondaires 2011

Mathématiques II / Sections C et D

Question I

Voir livre EM 66 p. 57

Question II

1) $e^x - e^{-x} = 3\cdot(1+e^{-x}) \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 3 + 3e^{-x}$

$(x\in\mathbb{R})$ $\qquad \Leftrightarrow e^x - 4e^{-x} - 3 = 0$

$\qquad \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$

Posons $e^x = y > 0$. L'équation devient :

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{y = -1}_{\text{à rejeter}} \text{ ou } y = 4$$

D'où : $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$

$\qquad \Leftrightarrow x = 2\ln 2$

$S = \{2\ln 2\}$

2) $\log_{25}(5-2x) \geq \log_5 x - \frac{1}{2}$

C.E. : $\bullet\ 5-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$; $\bullet\ x > 0$ $\quad\Big\}\ x \in \left]0\,;\frac{5}{2}\right[$

$\forall x \in \left]0\,;\frac{5}{2}\right[,\ \log_{25}(5-2x) \geq \log_5 x - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_5(5-2x)}{\log_5 25} \geq \log_5 x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_5(5-2x) \geq \log_5 x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5-2x) \geq 2\log_5 x - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5-2x) + \log_5 5 \geq \log_5 x^2$$

$$\Leftrightarrow 5(5-2x) \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 25 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [-5-5\sqrt{2}\,;-5+5\sqrt{2}]$$

$S =]0\,;-5+5\sqrt{2}]$

Question III

$$f(x) = \left(\frac{-x+1}{2-x}\right)^{3x} = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3x}$$

1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f' =]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$

$$f(x) = e^{3x \ln \frac{x-1}{x-2}}$$

$$f'(x) = \left[3 \ln \frac{x-1}{x-2} + 3x \frac{\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}}{\frac{x-1}{x-2}} \right] e^{3x \ln \frac{x-1}{x-2}}$$

$$= \left[3 \ln \frac{x-1}{x-2} + 3x \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{-1}{(x-2)^2} \right] \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^{3x}$$

$$= \left[3 \ln \frac{x-1}{x-2} - \frac{3x}{(x-1)(x-2)} \right] \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^{3x}$$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{\to 1} \right)^{3x \to +\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{3x \ln \frac{x-1}{x-2}}$

Limite de l'exposant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{3x}_{\to +\infty} \underbrace{\ln \frac{x-1}{x-2}}_{\to 0} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x-2} \to 0}{\frac{1}{3x} \to 0}$

$$\underset{\text{H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-1}{(x-1)(x-2)}}{-\frac{1}{3x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{(x-1)(x-2)} = 3$$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^3$

Question IV

1) $F(x) = \int \frac{4+x}{\sqrt{2x-1}}$ p.p. $u(x) = 4+x$, $u'(x) = 1$; $v'(x) = (2x-1)^{-\frac{1}{2}}$, $v(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = (2x-1)^{\frac{1}{2}}$

$$= (4+x)\sqrt{2x-1} - \int (2x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (4+x)\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2} \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k$$

$$= (4+x)\sqrt{2x-1} - \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + k$$

$$= \sqrt{2x-1}\left(4 + x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) + k$$

$$= \sqrt{2x-1}\left(\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}\right) + k = \frac{1}{3}\sqrt{2x-1}\,(x+13) + k$$

$F(5) = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{9} \cdot 18 + k = 20$

$\Leftrightarrow k = 2$

D'où : $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{2x-1}\,(x+13) + 2$ sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$

2) Soient $f(x) = -3x^2 - 10x + 5$ et $g(x) = 5 - x^3$.

$f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$

$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - 10) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = 5$

x	$-\infty$		-2		0		5		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 - 3x^2 - 10x)\,dx - \int_{0}^{5} (x^3 - 3x^2 - 10x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - 5x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - 5x^2\right]_{0}^{5}$$

$$= -(4 + 8 - 20) - \left(\frac{625}{4} - 125 - 125\right)$$

$$= 8 + 250 - \frac{625}{4}$$

$$= \frac{407}{4} \text{ u.a}$$

Question V

$$f(x) = \frac{x - \ln 2x}{x} = 1 - \frac{\ln 2x}{x}$$

1) a) dom f = dom f' = $\mathbb{R}_0^+$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{\overset{\to -\infty}{\ln 2x}}{\underset{\downarrow 0^+}{x}}\right) = +\infty$ A.V. : $x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln 2x}{x}\right) = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\nearrow +\infty}{\ln 2x}}{\underset{\searrow +\infty}{x}}$$

$$\underset{(H)}{=} 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2x}$$

$$= 1$$ A.H. à droite : $y = 1$

c) $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$, $f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln 2x}{x^2} = \dfrac{\ln 2x - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = e$

$\Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$ ($\simeq 1{,}36$)

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ , \ f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - (\ln 2x - 1)\cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{1 - 2\ln 2x + 2}{x^3}$$

$$= \frac{-2\ln 2x + 3}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \iff 2\ln 2x = 3$$
$$\iff \ln 2x = \frac{3}{2}$$
$$\iff 2x = e^{\frac{3}{2}}$$
$$\iff x = \frac{1}{2}e\sqrt{e} \quad (\simeq 2{,}24)$$

d) Tableau récapitulatif

x	0		$\frac{e}{2}$		$\frac{1}{2}e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$1-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$1-\frac{3}{e\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1
$\mathcal{C}_f$	‖	$\cup$ $\uparrow$	m	$\cup$ $\uparrow$	P.I.	$\cap$ $\downarrow$	A.H. $y=1$

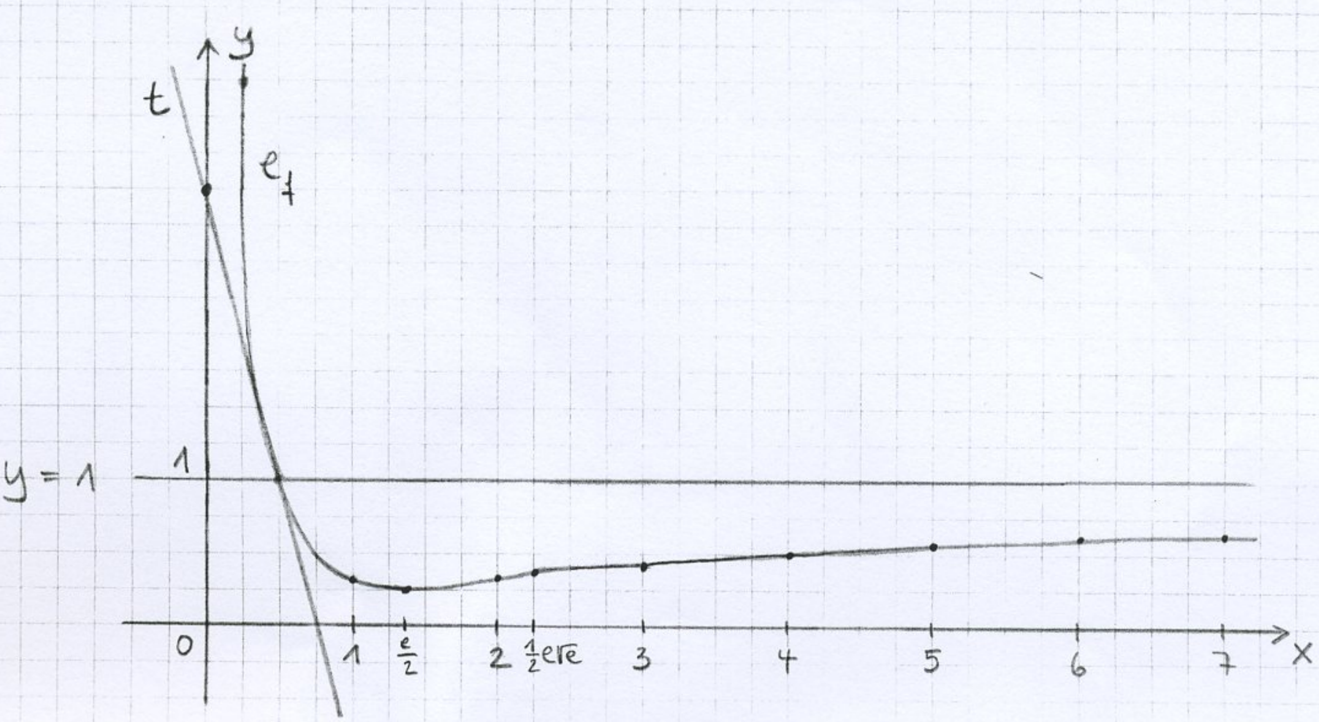
A.V. $x=0$

$\left(1-\frac{2}{e} \simeq 0{,}26 \right.$

$\left. 1-\frac{3}{e\sqrt{e}} \simeq 0{,}33\right)$

e) Représentation graphique

x	0,5	1	2	3	4	5	6	7	0,25	0,75
y	1	0,31	0,31	0,4	0,48	0,54	0,59	0,62	3,77	0,46



2) $t \equiv y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ avec $x_0 = \frac{1}{2}$.

$f(\frac{1}{2}) = 1$

$f'(\frac{1}{2}) = -4$

D'où : $t \equiv y = -4(x-\frac{1}{2}) + 1$

$t \equiv y = -4x + 3$

3) $$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \left(1 - \frac{\ln 2x}{x}\right) dx = \left[x - \frac{1}{2}\ln^2 2x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}$$

$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e}{2} - 1 \text{ u.a.}$$

Correction:

Problème:

1. a) $P(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

$$\begin{cases} P(0) = 300 \\ P'(0) = 71 \\ P(20) = 1800 \\ P'(5.5) = 85.5 \\ P''(5.5) = 0 \end{cases}$$

$\iff d = 71.0, a = 4.5417 \times 10^{-3}, b = -0.22639, c = 2.9111, e = 300.0$

donc $P(x) = 4.5417 \times 10^{-3} \cdot x^4 - 0.22639 \cdot x^3 + 2.9111 \cdot x^2 + 71 \cdot x + 300$

$P'''(5.5) = -0.75884 < 0$ donc la vitesse de croissance est **maximale** lorsque l'éléphant a 5,5 ans.

b) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ l'expression polnômial n'est pas un bon modèle exprimant la réalité car le poids ne peut pas croître indéfiniment.

2. $W(t) = 2600 \cdot (1 - 0.51 \cdot e^{-0.075 \cdot t})^3$

a) $W(0) = 305.89$

$W'(t) = 2.9835 \times 10^{-2}(-100.0 + 51.0\exp(-0.075t))^2 \exp(-0.075t)$

$W'(0) = 71.634$

Le poids d'un nouveau-né est de 306 *kg* et la vitesse de croissance du poids est de 71,6 *kg/an*

b) $W(t) = 1800 \iff t = 19.818$

$W'(19.818) = 52.814$

Une femelle de 20 *ans* a un poids de 1800 *kg* et la vitesse de croissance du poids est 52,8 *kg/an*

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} W(t) = 2600.0$

La limite maximale du poids d'une femelle (sans être atteint) est de 2600 *kg*.

d) $W''(t) = 45.648\exp(-0.15t) - 17.46\exp(-0.225t) - 22.376\exp(-0.075t)$

$W''(t) = -22.3763 \cdot (.798516)^t (1.07788^t - 1.53)(1.07788^t - .51)$

$W''(t) = 0 \iff t = 5.6702 = \alpha$ ou $t = -8,9779 = \beta$

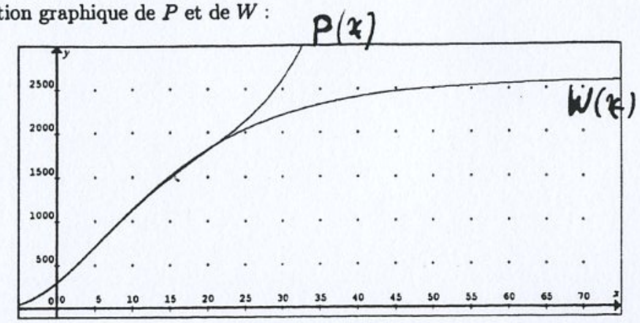
t	0		α		$+\infty$
$W''(t)$		+	0	−	
$W'(t)$		↗	*Max*	↘	

ou $W'''(5.67) = -0.73128 < 0$ donc vitesse maximal si $t = 5,67$ ans

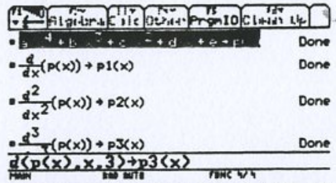
$W'(5.67) = 86.667$

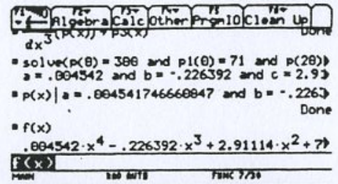
La vitesse de croissance maximale est après 5.67 *ans* et est de 86.667 *kg/an*.

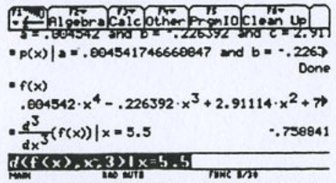
3. Représentation graphique de P et de W :

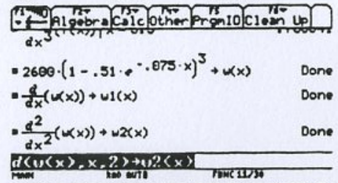


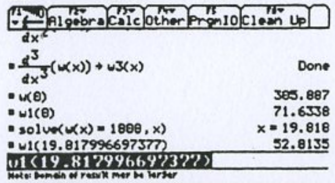
Copies d'écran:

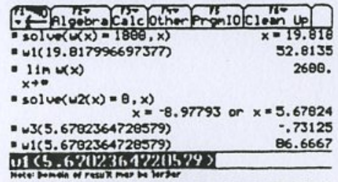
1) 

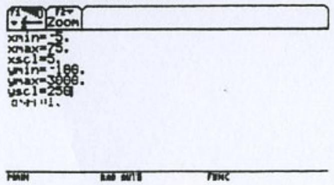
2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

7) 

8)