Corrigé Math II – CD – juin 2010

(1) voir cours

(2) a) $2\cdot\ln(3-x)-\ln(x-1)\geqslant 2\ln 3-\ln(2x-1)\quad(*)$

C.E. $\begin{cases}3-x>0\\x-1>0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<3\\x>1\\x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3$

$D_E=]1,3[$

$(*)\Leftrightarrow \ln(3-x)^2+\ln(2x-1)\geqslant \ln 3^2+\ln(x-1)$

$\Leftrightarrow \cancel{\ln}(3-x)^2(2x-1)\geqslant \cancel{\ln}\,9(x-1)$

$\Leftrightarrow (9-6x+x^2)(2x-1)\geqslant 9x-9$

$\Leftrightarrow 18x\cancel{-9}-12x^2+6x+2x^3-x^2-9x+\cancel{9}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2x^3-13x^2+15x\geqslant 0$

$\Leftrightarrow x(2x^2-13x+15)\geqslant 0$

x		0		1		$\frac{3}{2}$		3		5	
x	−	0	+		+		+		+		+
$2x^2-13x+15$	+		+		+	0	−		−	0	+
$x\cdot(\ldots)$	−	0	+		+	0	−		−	0	+

$2x^2-13x+15=0$

$\Delta=169-120=49$

$x'=\frac{13+7}{4}=5$

$x''=\frac{13-7}{4}=\frac{3}{2}$

$S=\left]1,\frac{3}{2}\right]$

b) $12e^{-3x}+1=e^{3x}\quad\Big|\cdot e^{3x}>0$

$\Leftrightarrow 12+e^{3x}=(e^{3x})^2\quad(*)$

Posons $y=e^{3x}$, alors :

$(*)\Leftrightarrow 12+y=y^2\Leftrightarrow y^2-y-12=0$

$\Delta=1+48=49,\ y'=\frac{1+7}{2}=4,\ y''=\frac{1-7}{2}=-3$

D'où : $(*)\Leftrightarrow y=4$ ou $y=-3\Leftrightarrow e^{3x}=4$ ou $\underbrace{e^{3x}=-3}_{\text{imp.}}$

$\Leftrightarrow 3x=\ln 4\Leftrightarrow x=\frac{\ln 4}{3}$

$S=\left\{\frac{\ln 4}{3}\right\}$

(3) $f(x)=2\ln^2x-4\ln x$

a) • $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}_+^*$

• $\lim\limits_{0^+} 2\underbrace{\ln^2 x}_{\to+\infty}\underbrace{-4\underbrace{\ln x}_{\to-\infty}}_{\to+\infty}=+\infty$, $\underline{\text{A.V. } x=0}$

$\lim\limits_{+\infty}\underbrace{2\ln^2x}_{+\infty}-4\underbrace{\ln x}_{+\infty}$ f.i. $\infty-\infty$

$=\lim\limits_{+\infty} 2\underbrace{\ln x}_{+\infty}\underbrace{(\ln x-2)}_{\to+\infty}=+\infty$, pas d'A.H.D.

2

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{+\infty} \frac{4\ln x \cdot \frac{1}{x} - 4\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{+\infty} 4 \cdot \frac{\ln x - 1}{x} \quad \text{f.i. } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{+\infty} 4 \cdot \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{+\infty} \frac{4}{x} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pas d'A.O.D.} \\ \text{branche parabolique} \\ \text{de direction } Ox \end{array} \right.$$

- $f'(x) = \underbrace{\frac{4}{x}}_{>0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}(\ln x - 1)$ signe de $\ln x - 1$

$\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

- $f''(x) = 4 \cdot \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot(\ln x - 1)}{x^2} = 4 \cdot \frac{1 - \ln x + 1}{x^2} = 4 \cdot \frac{2 - \ln x}{x^2}$ signe de $2 - \ln x$

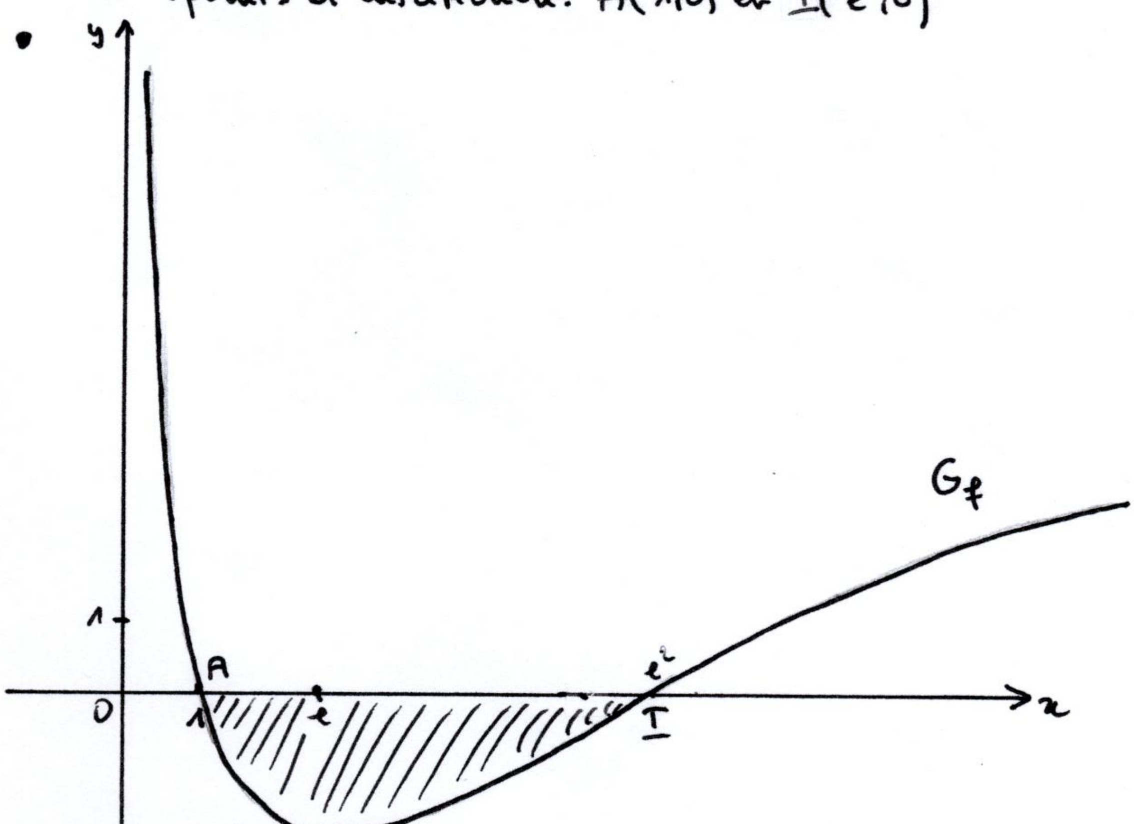
$2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \ln x \Leftrightarrow e^2 \geq x$

x	0		$e^2 \approx 7{,}4$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
G_f	‖	$\cup$		$\cap$	

1 point d'inflexion $I(e^2, 0)$

- $G_f \cap (Ox)$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln^2 x - 4\ln x = 0 \Leftrightarrow 2\ln x(\ln x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^2$

donc 2 points d'intersection: $A(1,0)$ et $I(e^2, 0)$

- 

b) $F(x) = 2x(2-\ln x)^2$, $D_F = \mathbb{R}_+^*$

$F'(x) = 2(2-\ln x)^2 + 2x \cdot 2(2-\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)$

$= 2(4 - 4\ln x + \ln^2 x) - 4(2-\ln x)$

$= \cancel{8} - 8\ln x + 2\ln^2 x - \cancel{8} + 4\ln x$

$= 2\ln^2 x - 4\ln x$

$\overset{?}{=} f(x)$

c) $A\,\text{in} = \left|\int_1^{e^2} f(x)\,dx\right| = |F(e^2) - F(1)| = |2e^2 \cdot 0 - 2\cdot 2^2| = 8 \text{ cm}^2$

(4) $f(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\cdot\ln x}$

a) C.E. $\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

$D_f = \mathbb{R}_+^* = D_{f'}$

$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right)e^{\sqrt{x}\ln x} = \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)x^{\sqrt{x}} = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}$

b) $\lim\limits_{0+} e^{\sqrt{x}\ln x}$; $\sqrt{x} \to 0$, $\ln x \to -\infty$ f.i. $0\cdot\infty$

$\lim\limits_{0+} \sqrt{x}\cdot\ln x = \lim\limits_{0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ f.i. $\frac{\infty}{\infty}$ $\underset{(H)}{=} \lim\limits_{0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim\limits_{0+} -2\sqrt{x} = 0$

D'où : $\lim\limits_{0+} f = e^0 = 1$

(5) a) $I = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin 2x}{(3-2\cos^2 x)^2}\,dx$

posons : $u = 3 - 2\cos^2 x$

alors : $u' = -4\cos x\cdot(-\sin x) = 4\cos x\cdot\sin x = 2\cdot\sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}u' = \sin 2x$

$f = \frac{1}{2}\,\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{2}\,u^{-2}u'$

$F = \frac{1}{2}\,\frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2u}$

D'où : $F(x) = -\frac{1}{2(3-2\cos^2 x)}$

$F(\pi) = -\frac{1}{2(3-2)} = -\frac{1}{2}$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2\cdot 3} = -\frac{1}{6}$

$I = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$

b) • $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

• 1re méthode

$\frac{x^2 - x + 3}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$ (*)

(*) $|\cdot x \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x^2-x+3}{x^2+1}}_{\to 3} = a + \underbrace{\frac{bx+c}{x^2+1}\cdot x}_{\to 0}$ pour $x \to 0$ donc $\underline{a=3}$

(*) $\Big| \cdot(x^2+1) \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+3}{x} = \dfrac{a}{x}(x^2+1) + bx + c$

pour $x \to i$: $\dfrac{-1-i+3}{i} = 0 + bi + c \quad |\cdot i$

$\Leftrightarrow 2 - i = -b + ci$

$\Leftrightarrow \underline{b=-2}$ et $\underline{c=-1}$

D'où $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{-2x-1}{x^2+1} = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1}$

<u>2e méthode</u> : par identification

$f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1} \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+3}{\cancel{x(x^2+1)}} = \dfrac{a(x^2+1)+x(bx+c)}{\cancel{x(x^2+1)}}$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 3 = ax^2 + a + bx^2 + cx$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ c=-1 \\ a=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow a=3, c=-1, b=1-3=-2$

$f(x) = 3\cdot\dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1}$

$\left(\dfrac{u'}{u} \text{ avec } u = x^2+1\right)$

$F(x) = 3\ln|x| - \ln|x^2+1| - \text{Atan}\, x + k$ sur $\cancel{\mathbb{R}^*_+}$ ou $\mathbb{R}^*_-$ car $-1 \in \mathbb{R}^*_-$

$F(-1) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3\cdot 0 - \ln 2 - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + k = \dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + \ln 2 = \dfrac{\pi}{4} + \ln 2$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_- \quad F(x) = 3\ln(-x) - \ln(x^2+1) - \text{Atan}\, x + \dfrac{\pi}{4} + \ln 2$

<u>Problème</u>

1) $a(x) = p\cdot x + m$, $f(0) = 2$, $f(1) = \dfrac{3}{2}$

donc $a(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$ (V200)

2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\begin{cases} f(-1) = 2{,}5 & \text{car } A \in \mathcal{C}_f \\ f(2) = 2{,}5 & \text{car } B \in \mathcal{C}_f \\ f(3) = 0{,}5 & \text{car } C \in \mathcal{C}_f \\ f'(-1) = -\dfrac{1}{2} & \text{car en } A\ \mathcal{C}_f \text{ et } D_a \text{ ont même direction} \end{cases}$

V200 : $a = -\dfrac{1}{6}$, $b = \dfrac{1}{6}$, $c = \dfrac{1}{3}$, $d = \dfrac{5}{2}$

D'où $f(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{2}$

3) $f''(x) = -x + \frac{1}{3}$

x		$\frac{1}{3}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$

D'où $I\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ = point d'inflexion

$T \equiv y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{425}{162}$ et $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{18}$ (V200) donc $T \equiv y = \frac{7}{18}x + \frac{202}{81}$

4) La distance de $M(x, f(x))$ à $d \equiv y = 3$ est donnée par : $3 - f(x)$

Condition : $3 - f(x) > \underbrace{0{,}1}_{=100\,m} \iff x > -1{,}47\ldots$

D'où : $\forall x \in [-1, 3]$ $3 - f(x) > 0{,}1$ et la distance minimale est bien respectée !

autre méthode

x		$\simeq -0{,}55$		$\simeq 1{,}22$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	mini	$\nearrow$	$\simeq 2{,}85$ maxi	$\searrow$

$f(-1) = 2{,}5 < 2{,}85$

donc $f(x) \leq 2{,}85$ pour tout $x \in [-1, 3]$

La distance mini de la route au parc vaut $\simeq 3 - 2{,}85 = 0{,}15\,km$

$= 150\,m \overset{!}{>} 100\,m$

5) A_1 = aire comprise entre $\mathcal{C}_f$ et $D_a = \int_{-1}^{3} (f(x) - a(x))\,dx = \frac{32}{9}\,km^2$

A_2 = ______ $\mathcal{C}_v$ et $D_a = \int_{0}^{2} (v(x) - a(x))\,dx = 1\,km^2$

A = aire de la zone artisanale $= A_1 - A_2 = \frac{23}{9}\,km^2 = \frac{23 \cdot 10^6}{9}\,m^2$

Prix de vente total du terrain $= \frac{23 \cdot 10^6}{9} \cdot 15 \simeq 38'333'333$ €