Corrigé - Épreuve écrite 2016

Mathématiques II

Section B

Question I

$$f(x)=\begin{cases}(2+x)e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -x+2x\ln(x^2) & \text{si } x>0\end{cases}$$

1) **Domaine de définition**

- Sur $]-\infty;0[$:

  C.E. : $x\neq 0$ toujours vrai

- Sur $]0;+\infty[$:

  C.E. : $x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$ toujours vrai

d'où $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}$

Domaine de continuité

Étudions la continuité de f en $x=0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}(2+x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=\text{"}2\cdot 0^+\text{"}=0^+$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}-x+2x\ln(x^2)$

  $=\lim\limits_{x\to 0^+}-x+4x\ln x=\text{"}0^-+4\cdot 0^+\cdot(-\infty)\text{"}$ f.i.

Calcul à part

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0^-$$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+}-x+4x\ln x=\text{"}0^-+4\cdot 0^-\text{"}=0^-$

On en tire que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

et f est donc continue en $x=0$.

Finalement : $\operatorname{domc} f=\mathbb{R}$

2) • $\lim\limits_{x\to -\infty}(2+x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=\text{"}-\infty\cdot 1\text{"}=-\infty$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2+x}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}=\text{"}1\cdot 1\text{"}=1$$

$$\lim_{x\to -\infty}(2+x)e^{\frac{1}{x}}-x=\text{"}(-\infty)\cdot 1+\infty\text{" f.i.}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}2e^{\frac{1}{x}}+x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$$

$$=\text{"}2\cdot 1+(-\infty)\cdot 0\text{" f.i.}$$

Calcul à part :

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\cancel{-\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$$

d'où

$$\lim_{x\to -\infty}2\cdot e^{\frac{1}{x}}+x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\text{"}2\cdot 1+1\text{"}=3$$

A.O.G. d'éq. $y=x+3$

- $\lim\limits_{x\to +\infty}-x+2x\ln(x^2)=\text{"}-\infty+\infty\text{" f.i.}$

  $=\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(-1+2\ln(x^2)\right)=\text{"}+\infty\cdot(+\infty)\text{"}$
  $=+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(-1+2\ln(x^2)\right)=+\infty$$

B.P.D. dans la direction de (Oy)

3) • $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(2+x)\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} (2+x)\cdot \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \text{"}2\cdot\dfrac{0^+}{0^-}\text{"}$ f.i.

Calcul à part

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} -e^{\frac{1}{x}} = 0^-$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^-} (2+x)\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \text{"}2\cdot 0^-\text{"} = 0^-$

f est donc dérivable à gauche en 0

et $f'_G(0) = 0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-1+2\ln x^2)$

$= \text{"}-1+2\cdot(-\infty)\text{"} = -\infty$

f n'est donc pas dérivable à droite en 0.

On en tire que f n'est pas dérivable en 0 et $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}_0$

4) • $\forall x \in]-\infty;0[$ on a

$f'(x) = 1\cdot e^{\frac{1}{x}} + (2+x)\cdot e^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= \dfrac{x^2-x-2}{\underbrace{x^2}_{>0}}\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{>0}$

a le même signe que x^2-x-2

Calculons les racines de x^2-x-2:

$\Delta = 1+8 = 9$

$x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$

$x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$

• $\forall x \in]-\infty;0[$ on a

$f''(x) = \dfrac{\left[(2x-1)\cdot e^{\frac{1}{x}} + (x^2-x-2)e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]x^2 - (x^2-x-2)e^{\frac{1}{x}}\cdot 2x}{x^4}$

$= \dfrac{\left[(2x^3-x^2)e^{\frac{1}{x}} - (x^2-x-2)\cdot e^{\frac{1}{x}}\right] - (2x^3-2x^2-4x)\,e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$

$= \dfrac{(\cancel{2x^3}\cancel{-x^2}\cancel{-x^2}+x+2\cancel{-2x^3}\cancel{+2x^2}+4x)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$

$= \dfrac{(5x+2)}{\underbrace{x^4}_{>0}}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{>0}$

a le même signe que $5x+2$ (Racine : $-\frac{2}{5}$)

• $\forall x \in]0;+\infty[$ on a

$f'(x) = (-x+4x\ln x)'$

$= -1+4\ln x + 4x\cdot\frac{1}{x}$

$= 4\ln x + 3$

On a $4\ln x + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{\sqrt[4]{e}}{e}$

- $\forall x \in]0;+\infty[$ on a

$$f''(x) = \frac{4}{x} > 0 \text{ sur }]0;+\infty[$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{5}$		0		$\frac{\sqrt[4]{e}}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	I	$\searrow$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

5) Maximum local $M\left(-1; \frac{1}{e}\right)$

Minimum local $m\left(\frac{\sqrt[4]{e}}{e}; \frac{-4\sqrt[4]{e}}{e}\right)$

Point d'inflexion $I\left(-\frac{2}{5}; \frac{8\sqrt{e}}{5e^3}\right)$

avec $\frac{1}{e} \simeq 0{,}37$

$\frac{\sqrt[4]{e}}{e} \simeq 0{,}47$

$\frac{-4\sqrt[4]{e}}{e} \simeq -1{,}89$

$\frac{8\sqrt{e}}{5e^3} \simeq 0{,}13$

6) L'équation de cette tangente s'écrit

$$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{e}}{e}(x+2) + 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{e}}{e}x + \frac{2\sqrt{e}}{e}$$

7) Tableau des valeurs

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	$-2{,}5$	$-1{,}6$	$-0{,}7$	0	$0{,}4$	0	-1	$0{,}9$	$3{,}5$

Représentation graphique : voir feuille (4)

8) Déterminons d'abord la racine de f sur $]0;+\infty[$

$$-x + 2x\ln x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + 4x\ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(4\ln x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underset{\text{à écart.}}{x = 0} \text{ ou } \ln x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{e}$$

Alors

$$\mathcal{A} = -\int_1^{\sqrt[4]{e}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt[4]{e}}^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{\sqrt[4]{e}}^1 f(x)\,dx + \int_{\sqrt[4]{e}}^2 f(x)\,dx$$

Déterminons

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int(-x + 4x\ln x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 4\int x\ln x\,dx$$

I.P.P.

on pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$

alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

D'où

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x^2\ln x - 2\int x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x^2\ln x - x^2 + k$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + 2x^2\ln x + k$$

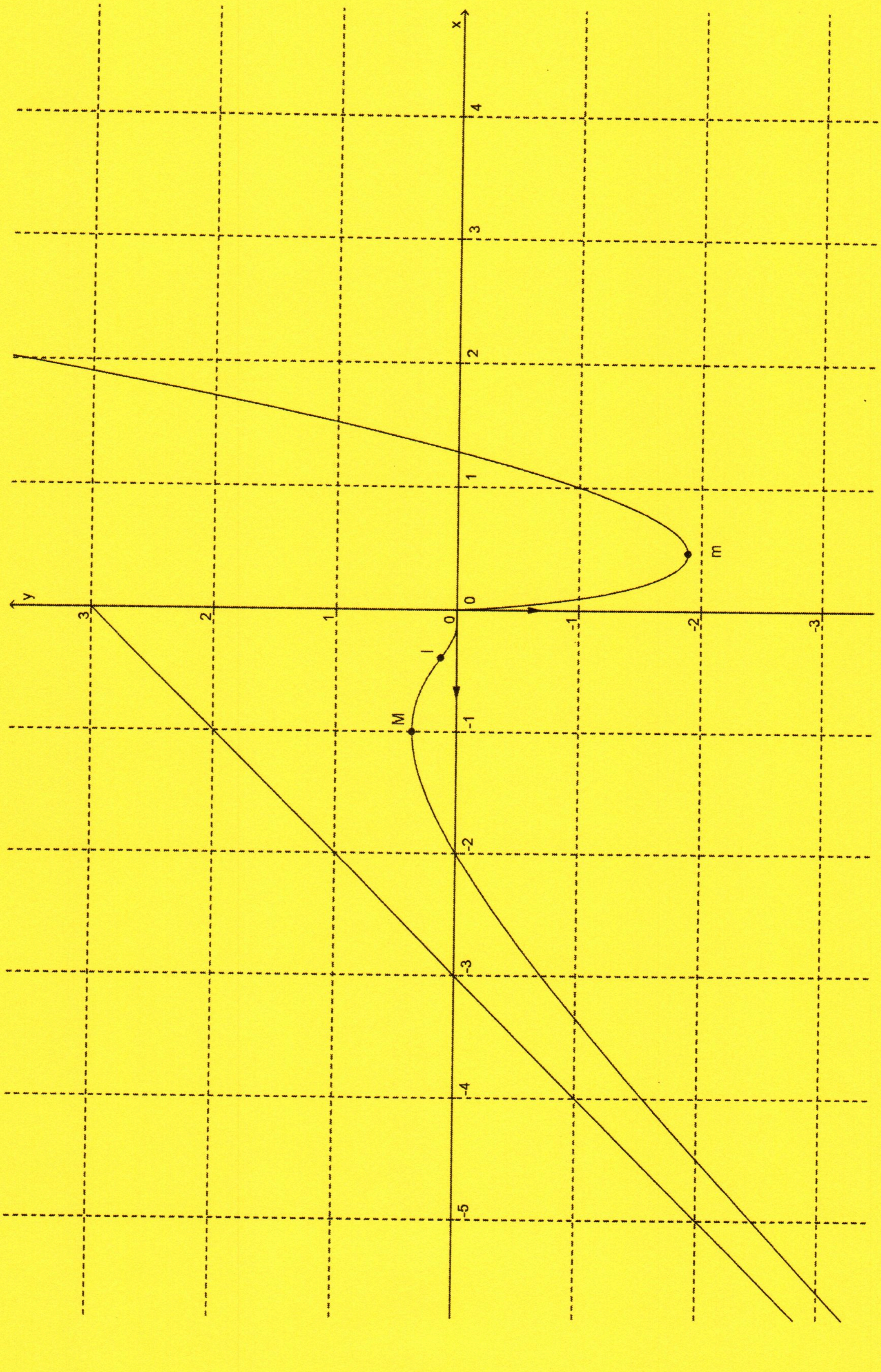
On en tire que

$$\mathcal{A} = F(1) - F(\sqrt[4]{e}) + F(2) - F(\sqrt[4]{e})$$

$$= F(1) + F(2) - 2F(\sqrt[4]{e})$$

$$= -\frac{3}{2} - 6 + 8\ln 2 - 2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{e} + \frac{1}{2}\sqrt{e}\right)$$

$$= -\frac{15}{2} + 8\ln 2 + 2\sqrt{e} \text{ u.a.}$$



x
y
0
1
2
3
4
-1
-2
-3
-4
-5
m
M
I

Question II

1) $g(x) = 2(3-x)\ln(3-x) - x + 5$

a) C.E. $3-x>0 \Leftrightarrow x<3$

d'où $\text{dom} g =]-\infty;3[= \text{dom} g'$

b) • $\lim\limits_{x\to-\infty} 2(3-x)\cdot\ln(3-x) - x + 5$

$= \text{"} +\infty\cdot(+\infty) + \infty \text{"} = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to 3^-} 2(3-x)\ln(3-x) - x + 5$

$= \text{"} 2\cdot 0^+\cdot(-\infty) + 2 \text{"}$ f.i.

Calcul à part :

$\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{\ln(3-x)}{\frac{1}{3-x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{\frac{-1}{3-x}}{\frac{1}{(3-x)^2}}$

$= \lim\limits_{x\to3^-} (x-3) = 0^-$

d'où $\lim\limits_{x\to3^-} 2\cdot(3-x)\cdot\ln(3-x) - x + 5$

$= \text{"} 2\cdot 0^- - 3 + 5 \text{"} = 2$

c) $\forall x\in\,]-\infty;3[$ on a

$g'(x) = -2\ln(3-x) + 2(3-x)\dfrac{-1}{3-x} - 1$

$= -2\ln(3-x) - 3$

On a

$-2\ln(3-x) - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln(3-x) \leq -\frac{3}{2}$

$\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 3-x \leq \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$

$\Leftrightarrow x \geq 3 - \dfrac{\sqrt{e}}{e^2}$

x	$-\infty$		$3-\frac{\sqrt{e}}{e^2}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2-2\frac{\sqrt{e}}{e^2}$	$\nearrow$	2

$g\left(3-\dfrac{\sqrt{e}}{e^2}\right) = 2\cdot\dfrac{\sqrt{e}}{e^2}\cdot\ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{e^2}\right) - 3 + \dfrac{\sqrt{e}}{e^2} + 5$

$= 2\dfrac{\sqrt{e}}{e^2}\cdot\ln\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) + 2 + \dfrac{\sqrt{e}}{e^2}$

$= -2\dfrac{\sqrt{e}}{e^2} + 2$

d) On déduit du tableau précédent que $\forall x\in\,]-\infty;3[$ on a $g(x)>0$

2) $f(x) = -(x-3)^2\cdot\ln(3-x) + 2x - 1$

a) $\text{dom} f =]-\infty;3[= \text{dom} f'$

b) • $\lim\limits_{x\to-\infty} -(x-3)^2\ln(3-x) + 2x - 1$

$= \text{"} -\infty\cdot(+\infty) - \infty - 1 \text{"} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-(x-3)^2\ln(3-x) + 2x - 1}{x}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} -2(x-3)\cdot\ln(3-x) - (x-3)^2\cdot\dfrac{-1}{3-x} + 2$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -2(x-3)\ln(3-x) + 3 - x + 2$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 2(3-x)\ln(3-x) - x + 5$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

$= +\infty$

B.P.G. dans la direction de (Oy)

• $\lim\limits_{x\to 3^-} -(x-3)^2\cdot\ln(3-x)+2x-1$

$= \text{"} -0^+\cdot(-\infty)+6-1 \text{"}$ f.i.

Calcul à part :

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\ln(3-x)}{\frac{1}{(x-3)^2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 3^-} \frac{\frac{-1}{3-x}}{\frac{-2(x-3)}{(x-3)^4}}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)^4}{-2(x-3)^2} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)^2}{-2}$$

$$= 0^-$$

d'où $\lim\limits_{x\to 3^-} -(x-3)^2\cdot\ln(3-x)+2x-1$

$= \text{"} 0^+ + 6 - 1 \text{"} = 5$

Point creux P(3;5)

c) $\forall x\in\,]-\infty;3[$ on a

$f'(x) \underset{\uparrow}{=} g(x) > 0$

voir développement ci-dessus

x	$-\infty$		3
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5 ‖

Question III

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{1-x^2} = \text{"} 1^{-\infty} \text{"} \text{ f.i.}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{(1-x^2)\ln\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)}$$

Calcul à part :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)}{\frac{1}{1-x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x+1}{2x-3}\cdot\frac{4x+2-4x+6}{(2x+1)^2}}{\frac{2x}{(1-x^2)^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{8}{(2x-3)(2x+1)}}{\frac{2x}{(1-x^2)^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x^4+\dots}{8x^3+\dots}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{1-x^2} = e^{-\infty} = 0^+$

Question IV

$$(m+2)e^{2x}+1 = (m-1)e^x$$

$$\Leftrightarrow (m+2)e^{2x}-(m-1)e^x+1=0 \quad (\text{I})$$

* Si $\underline{m=-2}$, alors l'éq. s'écrit

$3e^x+1=0$

et elle n'admet pas de solution

* Si $\underline{m\neq-2}$, alors on pose $e^x=y>0$

et l'équation s'écrit

$$(m+2)y^2-(m-1)y+1=0 \quad (\text{II})$$

On a alors

• $\Delta = [-(m-1)]^2-4(m+2)\cdot 1$

$= m^2-2m+1-4m-8$

$= m^2-6m-7$

Déterminons les racines de Δ :

$$\Delta_m = 36 + 28 = 64$$

$$m_1 = \frac{6+8}{2} = 7$$

$$m_2 = \frac{6-8}{2} = -1$$

m	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
m^2-6m+7		$+$	0	$-$	0	$+$	

• $S = \frac{m-1}{m+2}$ (avec $m \neq -2$)

m	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\frac{m-1}{m+2}$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

• $P = \frac{1}{m+2}$ (avec $m \neq -2$)

m	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\frac{1}{m+2}$		$-$	$\parallel$	$+$	

Conclusion

m	Δ	P	S	Nombre de sol. de l'éq. (II)	Nombre de sol. de l'éq. (I)
$m<-2$	$+$	$-$	$+$	Deux sol. de signes contraires	Une sol. unique
$m=-2$					Aucune solution
$-2<m<-1$	$+$	$+$	$-$	Deux sol. distinctes str. négat.	Aucune solution
$m=-1$	0	$+$	$-$	Une sol. unique str. négat.	Aucune solution
$-1<m<7$	$-$			Aucune solution	Aucune solution
$m=7$	0	$+$	$+$	Une sol. unique str. posit.	Une sol. unique
$m>7$	$+$	$+$	$+$	Deux sol. distinctes str. positiv.	Deux sol. distinctes

Question V

$$\log_x |x-1| \leq \log_{\sqrt{x}}(x+1) + \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$$

C.E. : ① $x>0$ et $x \neq 1$

② $x \neq 1$

③ $x>0$ et $x \neq 1$

④ $x>-1$

⑤ $x>0$ et $x\neq 1$

⑥ $x<2$

$\forall x \in]0;1[\cup]1;2[$ on a

$$\frac{\ln|x-1|}{\ln x} \leq \frac{2\ln(x+1)}{\ln x} - \frac{\ln(2-x)}{\ln x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left[|x-1|\cdot(2-x)\right]}{\ln x} \leq \frac{\ln(x+1)^2}{\ln x}$$

Distinguons deux cas :

• $\forall x \in]0;1[$ on a

$$\ln\left[(1-x)(2-x)\right] \geq \ln(x+1)^2 \quad | e$$

$$\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} \quad 2-x-2x+x^2 \geq x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{5} \qquad \text{d'où } S_1 = \left]0;\frac{1}{5}\right]$$

• $\forall x \in]1;2[$ on a

$$\ln\left[(x-1)(2-x)\right] \leq \ln(x+1)^2 \quad | e$$

$$\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} \quad 2x-x^2-2+x \leq x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{2x^2-x+3}_{>0} \geq 0 \quad \text{toujours vrai !}$$

(car $\Delta<0$)

d'où $S_2 =]1;2[$

Conclusion

$$S = \left]0;\frac{1}{5}\right] \cup]1;2[$$

Question VI

$$I = \int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}-1} (1+x)^2 \sin\left[\ln(1+x)\right] dx$$

Par changement de variable :

on pose $1+x = y \Leftrightarrow x = y-1$

alors $dx = dy$

et $x = e^{\frac{\pi}{2}}-1 \Leftrightarrow y = e^{\frac{\pi}{2}}$

$x = 0 \Leftrightarrow y = 1$

d'où

$$I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin(\ln y)\, dy$$

I.P.P.

on pose $f(y) = \sin(\ln y)$ et $g'(y) = y^2$

alors $f'(y) = \frac{1}{y}\cos(\ln y)$ et $g(y) = \frac{1}{3}y^3$

d'où

$$I = \left[\frac{1}{3}y^3 \sin(\ln y)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{3}\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} y^2 \cos(\ln y)\, dy$$

I.P.P.

on pose $u(y) = \cos(\ln y)$ et $v'(y) = y^2$

alors $u'(y) = -\frac{1}{y}\sin(\ln y)$ et $v(y) = \frac{1}{3}y^3$

d'où

$$I = \left[\frac{1}{3}y^3 \sin(\ln y) - \frac{1}{9}y^3\cos(\ln y)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{9}\underbrace{\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin(\ln y)\, dy}_{I}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{9} I = \frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{3}{10}e^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{10}$$

Question VII

$$f(x) = \frac{-9x^2+8x-11}{2x^3-12x^2+22x}$$

1) C.E. : $2x^3-12x^2+22x \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x(\underbrace{x^2-6x+11}_{>0 \text{ (car } \Delta<0)}) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$

d'où $\text{dom} f = \text{dom}_c f = \mathbb{R}_0$

$\forall x \in \mathbb{R}_0$ on a

$$\frac{-9x^2+8x-11}{2x^3-12x^2+22x} = \frac{ax^2-6ax+11a+2bx^2+2cx}{2x^3-12x^2+22x}$$

$\Leftrightarrow -9x^2+8x-11 = (a+2b)x^2+(-6a+2c)x+11a$

Par identification, on a

$$\begin{cases} a+2b = -9 \\ -6a+2c = 8 \\ 11a = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$$

2) La fonction f admet des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}_0$

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{-1}{2x} + \frac{-4x+1}{x^2-6x+11}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{4x-1}{x^2-6x+11}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x| - \int \frac{4x-12+11}{x^2-6x+11}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x| - 2\int\frac{2x-6}{x^2-6x+11}\,dx - 11\int\frac{1}{(x-3)^2+2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x| - 2\ln(x^2-6x+11) - \frac{11}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x| - 2\ln(x^2-6x+11) - \frac{11\sqrt{2}}{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x| - 2\ln(x^2-6x+11) - \frac{11\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}(x-3)}{2}\right) + k$$