Corrigé modèle

Question 1 **(2+3=5 points)**
voir cours

Question 2 **((3+3+4+1+2)+4=17 points)**

Soit la fonction f définie par $f(x)=2-\dfrac{1}{x}+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)$

1) Etudiez la fonction f :

a) $D_f=\mathbb{R}_0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2-0+\lim\limits_{x\to-\infty}\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)=-\infty$, car $\dfrac{1}{2}<1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2-0+\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)=-\infty$, car $\dfrac{1}{2}<1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)}{x}\underset{Hôpital}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x}{-\ln 2\cdot x^2}}{1}$$

d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x\ln 2}=0$ $\boxed{\text{B.P. x'x}}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\text{"}2+\infty\text{"}+\lim\limits_{x\to 0^-}\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)=\text{"}+\infty+\infty\text{"}=+\infty$ $\boxed{\text{A.V. : } x=0}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\text{"}2-\infty\text{"}+\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)\to\text{"}\infty-\infty\text{"}\ f.i.$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=2+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(x\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)-1\right)=2+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)}{\frac{1}{x}}-1\right)\underset{Hôpital}{=}2+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{2x}{\ln 2}-1\right)$$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2+\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2}{\ln 2}-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$

b) $D_{f'}=\mathbb{R}_0$

$f'(x)=0+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2x}{-\ln 2\cdot x^2}=\dfrac{\ln 2-2x}{\ln 2\cdot x^2}$

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln 2-2x\geq 0\Leftrightarrow 2x\leq\ln 2\Leftrightarrow x\leq\dfrac{\ln 2}{2}$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	//	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ // $-\infty$	↗	2,17	↘	$-\infty$

c) $f''(x)=\dfrac{2}{\ln(2)\cdot x^2}-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2x-2\ln(2)}{\ln(2)\cdot x^3}$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2\ln 2=0 \Leftrightarrow x=\ln 2$$

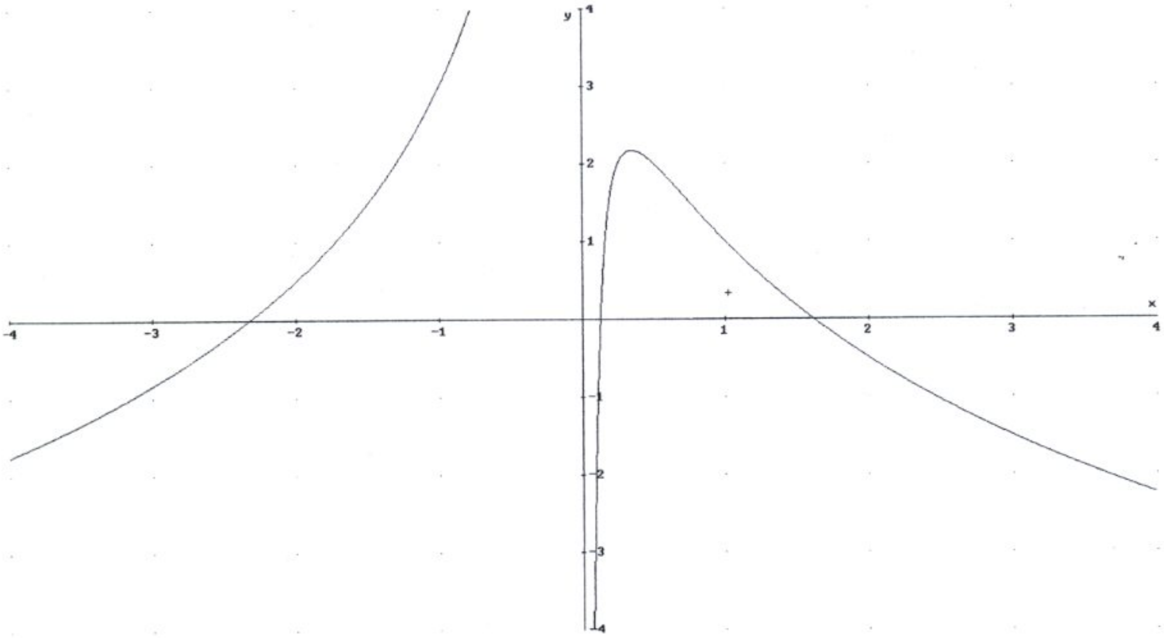
Concavité :

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	//	$-$	0	$+$	
G_f		∪ ↑	//	∩ ↓	$1{,}61$	∪ ↑	

Équation de la tangente en $x=\ln 2$:

$$T \equiv y=-\frac{1}{(\ln 2)^2}x-\frac{2}{\ln 2}\ln\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$$

d) Représentation graphique :



2) $f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)\geq -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)\geq \log_{\frac{1}{2}}(4) \Leftrightarrow x^2-4\leq 0$

C_f est au-dessus de C_g si $x\in\left([-2;0[\cup]0;2]\right)$

C_f est en dessous de C_g si $x\in\left(]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[\right)$

$$C_f\cap C_g=\left\{I_1\left(-2;\frac{1}{2}\right);I_2\left(2;-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$A_P=\int_2^4\left(-2-\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)\right)dx$$

Une primitive de f est : $F(x)=-\int\left(2+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)\right)dx=-2x-x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)-\frac{2}{\ln 2}x$;

Par conséquent, $A_P=F(4)-F(2)=\left(16-\frac{8}{\ln 2}\right)-\left(-\frac{4}{\ln 2}\right)=8-\frac{4}{\ln 2}\simeq 2{,}23\ u.a.$

Question 3 **(2+4+3+2=11 points)**

Etudiez la fonction g :

a) $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\frac{2}{x}\right)} = e^{\frac{\pi}{2}+0} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\frac{2}{x}\right)} = e^{\frac{\pi}{2}-0} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{\text{A.H. : } y = e^{\frac{\pi}{2}}}$

b) $$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} e^{\frac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\frac{2}{x}\right)} = e^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} = e^{\pi}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\frac{2}{x}\right)} = e^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} = e^{0} = 1$$

f est continue à gauche en 0, mais f n'est pas continue en 0

$$f_g'(0) = \lim_{x\to0^-} \frac{g(x)-e^{\pi}}{x} \underset{Hôpital}{=} \lim_{x\to0^-} -\frac{-2}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} e^{\frac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to0^-} \frac{2}{x^2+4} e^{\frac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{2}e^{\pi}$$

$$f_d'(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{g(x)-e^{\pi}}{x} = \text{"}\frac{1-e^{\pi}}{0^+}\text{"} = -\infty$$

f est dérivable à gauche en 0, mais f n'est pas dérivable en 0.

c) $$f'(x) = -\frac{-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}} e^{\frac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\frac{2}{x}\right)} = \frac{2}{4+x^2} e^{\frac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\frac{2}{x}\right)}$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	//	+	
$f(x)$	$e^{\frac{\pi}{2}}$ ↗		e^{π} | 1	↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$

d) $$f''(x) = \frac{4(1-x)}{\left(x^2+4\right)^2} e^{\frac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\frac{2}{x}\right)}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Concavité :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g''(x)$		+	//	+	0	−	
G_f		∪ (convexe)		∪ (convexe)	1,59	∩ (concave)	

Point d'inflexion : $I\left(1; e^{Arc\tan(0,5)}\right)$

Question 4 ((1+2)+(1+1+2)=7 points)

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ; \quad J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad ; \quad K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1) Calcul de I :

a) $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

b) $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\int_0^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1=f(1)-f(0)=\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln\sqrt{2}$

d'où, $I=\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

2) Calcul de J *et* K:

a) $J+2I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx+2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx=K$.

b) $K=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx=\left[x\cdot\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-\int_0^1 x\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$,

c'est-à-dire $K=1\cdot\sqrt{3}-\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-J$

c) $\begin{cases} J+2I=K \\ \sqrt{3}-J=K \end{cases}$, d'où $2K=2I+\sqrt{3}\Leftrightarrow K=I+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

et $2J+2I-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow J=-I+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow J=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

Question 5 (6+(2+2)=10 points)

1) Volume d'un solide

$$V=\pi\int_1^6\left[h(x)\right]^2dx=\pi\int_1^6\frac{25\cdot\ln x}{(x+1)^2}dx=25\pi\left[-\frac{\ln x}{x+1}\right]_1^6+25\pi\int_1^6\frac{1}{x(x+1)}dx$$

On montre que $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$, puis on obtient :

$$V=25\pi\left(-\frac{\ln 6}{7}\right)+25\pi\left[\ln|x|-\ln|x+1|\right]_1^6$$

$$V=25\pi\left(-\frac{\ln 6}{7}+\ln\frac{6}{7}+\ln 2\right)$$

$$V=25\pi\left(-\frac{\ln 6}{7}+\ln\frac{12}{7}\right)$$

donc $V\simeq 22{,}23\ u.v.$

2) Calculez:

a) $$\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{x}{9+4x^4}\,dx = \frac{3}{9\cdot 4}\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{\frac{4}{3}x}{1+\left(\frac{2}{3}x^2\right)^2}\,dx = \frac{1}{12}\left[Arc\tan\left(\frac{2}{3}x^2\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{12}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{48}$$

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(2x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2 x\cdot cos^2 x\cdot\cos x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2 x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\cos x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(4\sin^2 x\cdot\cos x - 4\sin^4 x\cdot\cos x\right)dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}\sin^3 x - \frac{4}{5}\sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{17}{120}$$

Question 6 **(3+(4+3)=10 points)**

1) Equation :

$$2^{2x} - 5^x - 4^{x-1} + 25^{\frac{x}{2}-1} = 0 \qquad D = \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4^x - 5^x - 4^x\cdot\frac{1}{4} + 5^x\cdot\frac{1}{25} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4^x\cdot\frac{3}{4} = 5^x\cdot\frac{24}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^x}{5^x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{24}{25}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{32}{25}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\ln 2 - 2\ln 5}{\ln 4 - \ln 5}$$

2) Inéquation:

a) $$2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq 4 \qquad D = \left]3;+\infty\right[$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x + \frac{\log_2(x-3)}{\log_2 2^{-1}} \geq \log_2 2^4$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x^2 - \log_2(x-3) \geq \log_2 2^4$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x^2 \geq \log_2\left[2^4(x-3)\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 48 \geq 0$$

$S = \left]3;4\right] \cup \left[12;+\infty\right[$

b) $6e^{5x+2}-7\sqrt{e^{8x+4}}+e^{3x+2}\leq 0$ $\qquad D=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 6e^{5x}e^{2}-7e^{4x}e^{2}+e^{3x}e^{2}\leq 0$

$\Leftrightarrow e^{3x}e^{2}\left(6e^{2x}-7e^{x}+1\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow 6e^{2x}-7e^{x}+1\leq 0$

$\Leftrightarrow 6y^{2}-7y+1\geq 0$

$\Leftrightarrow y\in\left[\frac{1}{6};1\right]$

$S=\left[-\ln 6;0\right]$