Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2014 Section: B Branche: **Mathématiques II**	**Numéro d'ordre du candidat** ____________________

Question 1 (2+3=5 points)

Complétez et démontrez les propriétés suivantes :

1) Soit a un réel fixé strictement positif et distinct de 1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(a^{x}\right)' =$ ______ .
2) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, et soit F une primitive quelconque de f sur $[a,b]$.

   On a, quel que soit $x \in [a,b]$: $\int_{a}^{x} f(t)\,dt =$ ______ .

Question 2 ((3+3+4+1+2)+4=17 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x} + \log_{\frac{1}{2}}\left(x^{2}\right)$

1) Etudiez la fonction f :
   a) déterminez le domaine de définition, calculez les limites aux bornes du domaine de définition et étudiez le comportement asymptotique ;
   b) déterminez le domaine de dérivabilité, calculez la dérivée première et établissez un tableau de variations ;
   c) calculez la dérivée seconde de la fonction f, puis analysez la concavité de la courbe représentative C_f de la fonction f et déterminez l'équation de la (des) tangente(s) au(x) point(s) d'inflexion éventuel(s) ;
   d) tracez la représentation graphique C_f dans un repère orthonormé.
2) Déterminez algébriquement les points d'intersection de C_f avec la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = -\dfrac{1}{x}$, de même que la position de C_f par rapport à C_g . En déduisez l'aire de la partie P du plan comprise entre la courbe C_f, la courbe C_g et les droites d'équation $x = m$ et $x = 4$, où m représente l'abscisse la plus grande des points d'intersection de C_f et C_g .

Question 3 (2+4+3+2=11 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{x}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ e^{\pi} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Etudiez la fonction f :

a) déterminez le domaine de définition, calculez les limites aux bornes du domaine de définition et étudiez le comportement asymptotique ;
b) étudiez la continuité et la dérivabilité de f en 0 ;
c) calculez la dérivée de la fonction f et établissez un tableau de variations ;
d) calculez la dérivée seconde de la fonction f, puis analysez la concavité de la courbe représentative C_f de la fonction f et recherchez d'éventuels points d'inflexion.

Question 4 **((1+2)+(1+1+2)=7 points)**

L'objectif de cette question est de calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ; \quad J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad ; \quad K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1) Calcul de I :

   Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

   a) Calculez la dérivée de la fonction f.
   b) En déduisez le calcul le la valeur exacte de I.

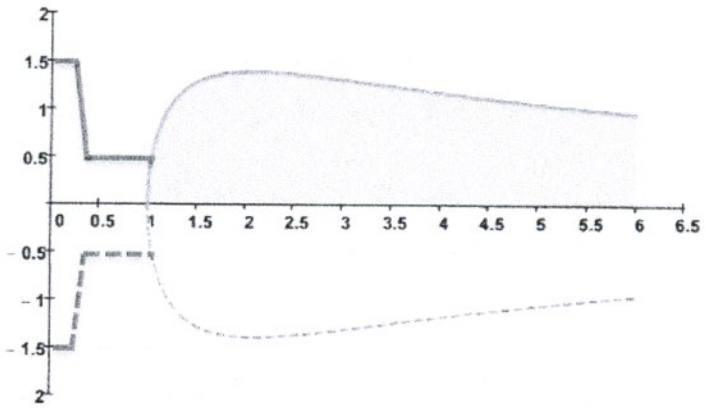
2) Calcul de J *et* K:

   a) Sans calculer explicitement J et K, vérifiez que $J+2I=K$.
   b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrez que $K=\sqrt{3}-J$.
   c) En déduisez les valeurs exactes de J et de K.

Question 5 **(6+(2+2)=10 points)**

1) Volume d'un solide

   Le rebord intérieur de la coupe transversale d'un verre de vin peut être représenté par la fonction h définie par $h(x)=\frac{5\sqrt{\ln x}}{x+1}$. Déterminez le volume de vin qu'on pourra verser dans ce verre sachant qu'il s'agit du volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface délimitée par la courbe représentative de h, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=6$.



Indication : déterminez a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x}$

2) Calculez :

   a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{x}{9+4x^4}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(2x)\cdot\cos x\,dx$

Question 6 **(3+(4+3)=10 points)**

1) Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2^{2x}-5^x-4^{x-1}+25^{\frac{x}{2}-1}=0$

2) Résolvez dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

   a) $2\log_2 x+log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq 4$

   b) $6e^{5x+2}-7\sqrt{e^{8x+4}}+e^{3x+2}\leq 0$