Correction de l'épreuve écrite de maths II en 1B (~~juin~~ sept. 2013)

Question 1

A)

$$g(x) = x^2 - \ln x + 1$$

1) $\text{dom}\, g = \mathbb{R}_+^*$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - \ln x + 1) \quad \text{F.I. } \infty - \infty$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$$

(Calcul à part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 1}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 \geq 0 \quad (\text{car } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$= \frac{3}{2} + \ln \sqrt{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$$

g admet un minimum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui vaut $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$.

4)

g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Vu que le minimum de g est supérieur à 0, $g(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

B)

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x} + 1$$

1) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_+^*$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x + \frac{\ln x}{x} + 1\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} + 1\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x) - x\right) = 1$

~~B.P. dans la direction de la droite $\Delta \equiv y = x$.~~ $\qquad$ AOD $\equiv y = x + 1$

3) $\forall x > 0,$

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - \ln x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0, \text{ car } g(x) > 0$$

4)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $\forall x > 0,$

$$f''(x) = \frac{x^2 g'(x) - 2x\, g(x)}{x^4} = \frac{x\left(2x - \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 - \ln x + 1\right)}{x^3} = \frac{2x^2 - 1 - 2x^2 + 2\ln x - 2}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathcal{C}_f$		$\frown$		$\smile$	

$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} + 1$

$\simeq 5{,}82$

Eq. de la tangente $t_{e^{3/2}}$:

$$t_{e^{3/2}} \equiv y = f'(e^{\frac{3}{2}})(x - e^{\frac{3}{2}}) + f(e^{\frac{3}{2}})$$

- $f(e^{\frac{3}{2}}) = e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} + 1$
- $f'(e^{\frac{3}{2}}) = \dfrac{g(e^{\frac{3}{2}})}{e^{3}}$

$$= e^{-3}\left(e^{3} - \tfrac{3}{2} + 1\right)$$

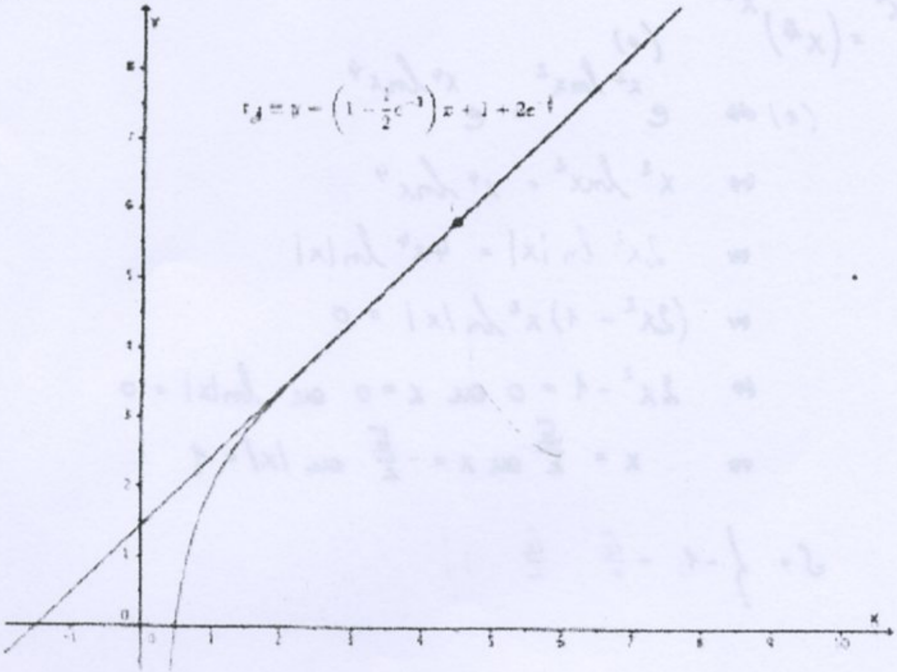
$$= 1 - \tfrac{1}{2}e^{-3}$$

$$t_{e^{3/2}} \equiv y = \left(1 - \tfrac{1}{2}e^{-3}\right)x - \left(1 - \tfrac{1}{2}e^{-3}\right)e^{\frac{3}{2}} + e^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} + 1$$

$$\Leftrightarrow t_{e^{\frac{3}{2}}} \equiv y = \left(1 - \tfrac{1}{2}e^{-3}\right)x \cancel{- e^{\frac{3}{2}}} + \tfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}} \cancel{+ e^{\frac{3}{2}}} + \tfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} + 1$$

$$\Leftrightarrow t_{e^{\frac{3}{2}}} \equiv y = \underline{\left(1 - \tfrac{1}{2}e^{-3}\right)}x + \underline{1 + 2e^{-\frac{3}{2}}}$$

6)



Question 2

1) a) $3\log_8(2x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+4) \geq \log_2(2-3x) \quad (*)$

C.E. : $2x-1>0$ et $x+4>0$ et $2-3x>0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$

$(*) \Leftrightarrow 3\,\dfrac{\log_2(2x-1)}{\log_2 8} + \dfrac{\log_2(x+4)}{\log_2 \frac{1}{2}} \geq \log_2(2-3x)$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-1) - \log_2(x+4) \geq \log_2(2-3x)$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-1) \geq \log_2\big((x+4)(2-3x)\big)$

$\Leftrightarrow (2x-1) \geq (x+4)(2-3x)$

$\Leftrightarrow 3x^2+12x-9 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2+4x-3 \geq 0 \qquad (x^2+4x-3=0$

$\Leftrightarrow -2-\sqrt{7} \leq x < \frac{2}{3} \qquad \Leftrightarrow x=-2-\sqrt{7}$ ou $x=-2+\sqrt{7})$

$S = \left[-2-\sqrt{7} ; \frac{2}{3}\right[$

b) $(x^2)^{x^2} = (x^4)^{x^4} \quad (*)$

$\forall x \neq 0, \quad (*) \Leftrightarrow e^{x^2 \ln x^2} = e^{x^4 \ln x^4}$

$\Leftrightarrow x^2 \ln x^2 = x^4 \ln x^4$

$\Leftrightarrow 2x^2 \ln|x| = 4x^4 \ln|x|$

$\Leftrightarrow (2x^2-1)\,x^2 \ln|x| = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2-1=0$ ou $x=0$ ou $\ln|x|=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $|x|=1$

$S = \left\{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$

2) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x-1}{4x+2}\right)^{3x-1} = \lim_{x \to +\infty} e^{(3x-1)\ln \frac{4x-1}{4x+2}}$

Calcul à part : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (3x-1) \ln \frac{4x-1}{4x+2}$ F.i. " $\infty \cdot 0$ "

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \frac{4x-1}{4x+2}}{\frac{1}{3x-1}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4}{4x-1} - \frac{4}{4x+2}}{-\frac{3}{(3x-1)^2}}$$

$$= -4\lim_{x \to +\infty} \frac{[(4x+2)-(4x-1)](3x-1)^2}{3(4x-1)(4x+2)}$$

$$= -4 \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{3}(3x-1)^2}{\cancel{3}(4x-1)(4x+2)}$$

$$= -4 \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^2}{16x^2}$$

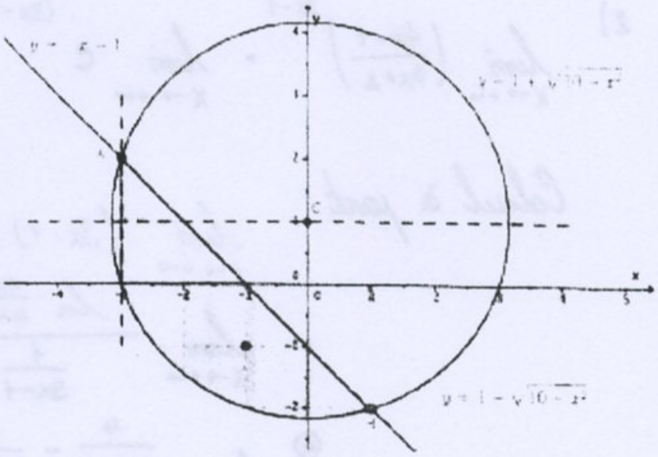
$$= -4 \cdot \frac{9}{16}$$

$$= -\frac{9}{4}$$

Donc, $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x-1}{4x+2}\right)^{3x-1} = e^{-\frac{9}{4}}$

3) a)

b) Recherche des abscisses des points d'intersection :



$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 10 & (1) \\ y = -x-1 & (2) \end{cases}$$

(2) dans (1) :

$x^2 + (-x-1-1)^2 = 10$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + (x+2)^2 = 10$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 4x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -3$ ou $x = 1$

$$A = \int_{-\sqrt{10}}^{-3} \left[\left(1+\sqrt{10-x^2}\right) - \left(1-\sqrt{10-x^2}\right)\right]dx + \int_{-3}^{1} \left[(-x-1) - \left(1-\sqrt{10-x^2}\right)\right]dx$$

$$= \underbrace{2\int_{-\sqrt{10}}^{-3} \sqrt{10-x^2}\,dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_{-3}^{1} \sqrt{10-x^2}\,dx}_{=I_2} - \int_{-3}^{1} (x+2)\,dx$$

- $I_1 = 2\sqrt{10}\displaystyle\int_{-\sqrt{10}}^{-3} \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2}\,dx$

Posons $\frac{x}{\sqrt{10}} = \sin t \Rightarrow \mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{\sqrt{10}} = t$

$\frac{dx}{\sqrt{10}} = \cos t\,dt$

$$I_1 = 20\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\mathrm{Arcsin}\frac{-3}{\sqrt{10}}} |\cos t|\cdot\cos t\,dt$$

car $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \mathrm{Arcsin}\frac{-3}{\sqrt{10}}\right]$, $\cos t \geq 0$

$$= 20\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\mathrm{Arcsin}\frac{-3}{\sqrt{10}}} \cos^2 t\,dt$$

$$= 10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\mathrm{Arcsin}\frac{-3}{\sqrt{10}}} (1+\cos 2t)\,dt$$

$$= 10\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\mathrm{Arcsin}\frac{-3}{\sqrt{10}}}$$

$$= 10\left(\mathrm{Arcsin}\frac{-3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{2}\sin 2\,\mathrm{Arcsin}\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) + 5\pi$$

Or, $\sin 2\,\mathrm{Arcsin}\frac{-3}{\sqrt{10}} = 2\sin\left(\mathrm{Arcsin}\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)\cos\left(\mathrm{Arcsin}\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$

$$= \cancel{2}^{1} \cdot \frac{-3\sqrt{10}}{\cancel{10}_{5}} \cdot \sqrt{1-\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{-3\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{10}}$$

$$= -\frac{3}{5}$$

Donc, $I_1 = -10\,\mathrm{Arcsin}\frac{3\sqrt{10}}{10} - 3 + 5\pi$

- $$I_2 = 5\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\mathrm{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}}^{\mathrm{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

$$= 5\,\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3}{2} + 5\,\mathrm{Arcsin}\frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= 5\,\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{10}}{10} + 5\,\mathrm{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}} + 3$$

Finalement,

$$A = 5\,\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{10}}{10} - 5\,\mathrm{Arcsin}\frac{3\sqrt{10}}{10} + 5\pi - \frac{1}{2}\left[(x+2)^2\right]_{-3}^{1}$$

$$\Leftrightarrow A = 5\left(\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{10}}{10} - \mathrm{Arcsin}\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) + 5\pi - 4 \ \text{u.a.}$$

$$\Rightarrow A \simeq 7{,}07 \ \text{u.a.}$$

Question 3

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\sqrt{-x}}, & \text{si } x \le 0 \\ x(\ln x)^2 - x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) a) · dom $f = \mathbb{R}$

· f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{\sqrt{-x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x(\ln x)^2 - x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -2\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{H}{=} 2\lim_{x\to 0^+} x$$

$$= 0$$

f est continue en 0 et $f(0) = 0$. Donc dom $f = \mathbb{R}$.

· f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{xe^{\sqrt{-x}}}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\ln x)^2 - x}{x} = \lim_{x\to 0^+} ((\ln x)^2 - 1) = +\infty$$

f n'est pas dérivable en 0. Donc, dom $f' = \mathbb{R}^*$.

$\mathcal{G}_f$ admet une demi-tangente de coef. 1 en 0^- et une demi-tangente verticale en 0^+.

b) $\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\sqrt{-x}} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\sqrt{-x}} = +\infty$

B.P. dans la direction d'(Oy).

$\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x(\ln x)^2 - x\right)$ "f.i : $\infty - \infty$"

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left((\ln x)^2 - 1\right)$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left((\ln x)^2 - 1\right) = +\infty$

B.P. dans la direction d'(Oy).

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sqrt{-x}} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{-x}} e^{\sqrt{-x}} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2\sqrt{-x}}\right) e^{\sqrt{-x}} \\ &= \left(1 + \frac{-x}{2\sqrt{-x}}\right) e^{\sqrt{-x}} \\ &= \left(1 + \frac{\sqrt{-x}}{2}\right) e^{\sqrt{-x}} \\ &= \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{-x}\right) e^{\sqrt{-x}} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \\ &= (\ln x)^2 + 2\ln x - 1 \end{aligned}$$

ou encore,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{-x}\right) e^{\sqrt{-x}}, & \text{si } x < 0 \\ (\ln x)^2 + 2\ln x - 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2+\sqrt{-x})e^{\sqrt{-x}} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2+\sqrt{-x} = 0 \quad$ imp.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0 \quad (*)$

Posons $t = \ln x$

$(*) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad t = -1-\sqrt{2}$ ou $t = -1+\sqrt{2}$

Revenons à x :

$\ln x = -1-\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow x = e^{-1-\sqrt{2}}$ | $\ln x = -1+\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow x = e^{-1+\sqrt{2}}$

x		0		$e^{-1-\sqrt{2}}$		$e^{-1+\sqrt{2}}$	
$f'(x)$	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	0	$-$
		0					

$f(e^{-1-\sqrt{2}}) = e^{-1-\sqrt{2}}(-1-\sqrt{2})^2 - e^{-1-\sqrt{2}}$

$= 2(1+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$

$\simeq 0,43$

$f(e^{-1+\sqrt{2}}) = e^{-1+\sqrt{2}}(-1+\sqrt{2})^2 - e^{-1+\sqrt{2}}$

$= 2(1-\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}$

$\simeq 1,25$

d) $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\quad f''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{-1}{2\sqrt{-x}}e^{\sqrt{-x}} + \frac{1}{2}(2-\sqrt{-x})\,\frac{-1}{2\sqrt{-x}}e^{\sqrt{-x}}$

$= -\frac{1}{4\sqrt{-x}}(3+\sqrt{-x})e^{\sqrt{-x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad f''(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x}$

$= \frac{2}{x}(\ln x + 1)$

ou encore,

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{(3+\sqrt{-x})}{4\sqrt{-x}}e^{\sqrt{-x}}, & \text{si } x<0 \\ \frac{2}{x}(\ln x + 1), & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$\forall x<0,\quad f''(x)=0 \Leftrightarrow 3+\sqrt{-x}=0$ imp.

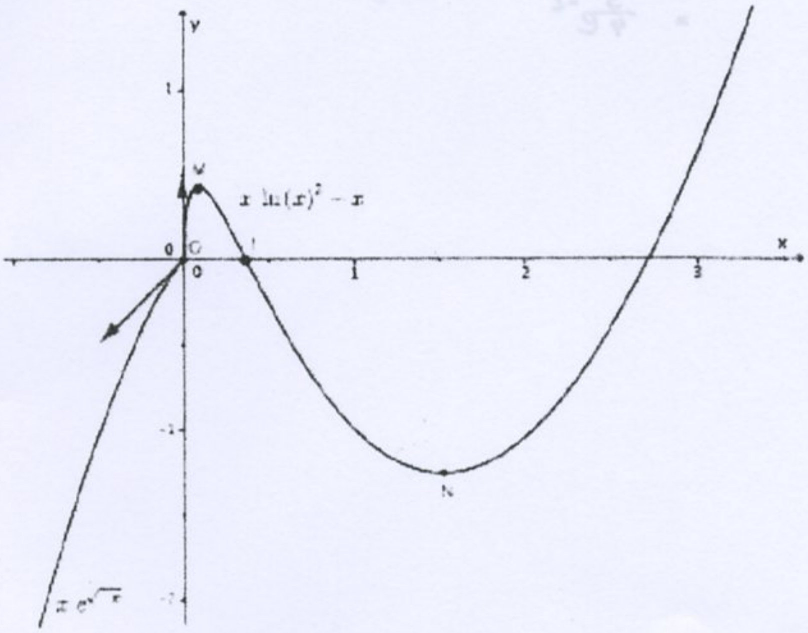
$\forall x>0,\quad f''(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

x		0		$\frac{1}{e}$	
$f''(x)$	$-$	||	$-$	0	$+$
C_f		||		p.i	

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}(-1)^2-\frac{1}{e}=0$

c)



2) a)

$$A(\alpha)=\int_\alpha^{\frac{1}{e}}\left(x(\ln x)^2-x\right)dx$$

$$=\int_\alpha^{\frac{1}{e}}x(\ln x)^2dx-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^{\frac{1}{e}}$$

(Calcul à part :

$$I=\int_\alpha^{\frac{1}{e}}x(\ln x)^2dx$$

Ipp. $\quad u=(\ln x)^2 \qquad v'=x$

$\quad u'=2\ln x\cdot\frac{1}{x} \qquad v=\frac{1}{2}x^2$

$$I = \left[\frac{1}{2}(x\ln x)^2\right]_{\alpha}^{\frac{1}{e}} - \int_{\alpha}^{\frac{1}{e}} x\ln x\,dx$$

$$\overset{I_{P}}{=} \left[\frac{1}{2}(x\ln x)^2\right]_{\alpha}^{\frac{1}{e}} - \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{\alpha}^{\frac{1}{e}} + \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{\alpha}^{\frac{1}{e}} \quad)$$

Donc, $A(\alpha) = \left[\frac{1}{2}(x\ln x)^2\right]_{\alpha}^{\frac{1}{e}} - \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{\alpha}^{\frac{1}{e}} - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{\alpha}^{\frac{1}{e}}$

$$= \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} - \frac{1}{2}(\alpha\ln\alpha)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\ln\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2$$

$$= \frac{3}{4}e^{-2} - \frac{1}{2}(\alpha\ln\alpha)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\ln\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2 \text{ ua}$$

b) $\lim\limits_{\alpha\to 0} A(\alpha) = \frac{3}{4}e^{-2} - \frac{1}{2}\underbrace{\lim\limits_{\alpha\to 0}(\alpha\ln\alpha)^2}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^2\ln\alpha} + \frac{1}{4}\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^2$

$$= \frac{3}{4}e^{-2}$$