Corrigé

Question 1

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(-x), & si\ x<0 \\ 0, & si\ x=0 \\ (x-2)e^{-\frac{1}{x}}, & si\ x>0 \end{cases}$$

1) **continuité en 0**

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \underbrace{x}_{\to 0}\,\underbrace{\ln(-x)}_{\to -\infty}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}}$ f.i. "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} (-x)$

$= 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{(x-2)}_{\to -2}\,\underbrace{e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^{\to -\infty}}}_{\to 0}$

$= 0$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$,

par conséquent **f est continue en 0.**

dérivabilité en 0

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \ln(-x) = -\infty$

donc **f n'est pas dérivable à gauche en 0.**

Le g.c. de f admet à gauche au point $(0,0)$ une demi-tgte verticale

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x-2)e^{-1/x}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\left(1-\frac{2}{x}\right)}_{\to -\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\to 0}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$ f.i. "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{2}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\dfrac{2}{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to +\infty}}\right)$

$= 0$

donc **f est dérivable à droite en 0** et $f'_d(0) = 0$

Le g.c. de f admet à droite au point $(0,0)$ une demi-tgte horizontale.

f n'est pas dérivable en 0

$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} = \mathrm{dom}_c\, f$

$\mathrm{dom}_d\, f = \mathbb{R}_0$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty}\,\underbrace{\ln(-x)}_{\to +\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \ln(-x) = +\infty$

BPG dans la direction de l'axe Oy

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{(x-2)}_{\to +\infty}\,\underbrace{e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^{\to 0}}}_{\to 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{\left(1-\frac{2}{x}\right)}_{\to 1}\underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\to 1} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)-x] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[(x-2)e^{-\frac{1}{x}} - x\right]$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\underbrace{x\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)}_{\to -1} - \underbrace{2e^{-\frac{1}{x}}}_{\to 2}\right]$

$= -3$

En effet:

$\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$ f.i. "$\frac{0}{0}$"

$\overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot \cancel{\frac{1}{x^2}}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}$

$= -1$

AO ≡ $y = x-3$

3) $\forall x\in\mathbb{R}_0^-$: $f'(x) = \ln(-x) + x\cdot\dfrac{1}{x}$

$= \ln(-x)+1$

$f'(x) \overset{>}{=} 0 \Leftrightarrow \ln(-x) \overset{>}{=} -1$

$\Leftrightarrow -x \overset{>}{=} \dfrac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x \overset{<}{=} -\dfrac{1}{e}$

$\forall x\in\mathbb{R}_0^+$: $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + (x-2)e^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\left(x^2+x-2\right) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}(x^2+x-2)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $\underline{x=-2}$ à écarter

$$\operatorname{sgn}[f'(x)] = \operatorname{sgn}(x^2+x-2)$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{e}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$ (M)	$\searrow$	$-\infty \Vert 0$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$ (m)	$\nearrow$	$+\infty$

$M\left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$; $m\left(1; -\frac{1}{e}\right)$

4) $\forall x \in \mathbb{R}_0^-: f''(x) = \frac{1}{x} < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_0^+: f''(x) = \frac{\left[e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}(x^2+x-2) + e^{-\frac{1}{x}}(2x+1)\right] \cdot x^2}{x^4}$

$- \frac{e^{-\frac{1}{x}}(x^2+x-2) \cdot 2x}{x^4}$

$= \frac{e^{-\frac{1}{x}}(\cancel{x^2}+x-2+\cancel{2x^3}+\cancel{x^2}-\cancel{2x^3}-\cancel{2x^2}+4x)}{x^4}$

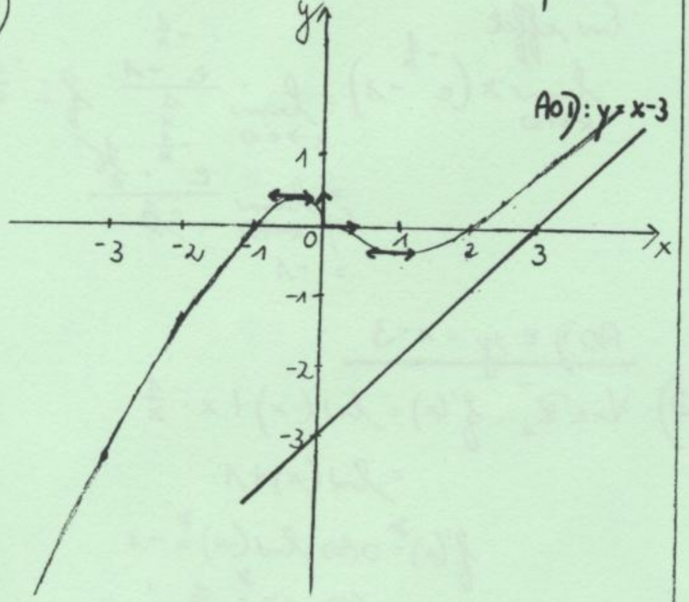
$= \frac{e^{-\frac{1}{x}}(5x-2)}{x^4}$

$f''(x) \geq 0 \iff x \geq \frac{2}{5}$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
G		$\frown$	$\Vert$	$\frown$	(PI)	$\smile$	

point d'inflexion : $I\left(\frac{2}{5}; \underbrace{-\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}}_{\simeq -0,13}\right)$

5)



x	-3	-2	$2,5$	3
$f(x)$	$-3,3$	$-1,39$	$0,34$	$0,72$

$\boxed{\text{Question 2}}$

1) $f(x) = \operatorname{Arc}\cos\left[\ln\left(\frac{3}{x}\right)\right]$

C.E.
- $x \neq 0$
- $\frac{3}{x} > 0 \iff x > 0$
- $-1 \leq \ln\left(\frac{3}{x}\right) \leq 1 \quad | \exp \uparrow$

$\iff \underbrace{\frac{1}{e}}_{>0} \leq \underbrace{\frac{3}{x}}_{>0} \leq \underbrace{e}_{>0}$

$\iff e \geq \frac{x}{3} \geq \frac{1}{e} \quad | \cdot 3$

$\iff \frac{3}{e} \leq x \leq 3e$

$\operatorname{dom} f = \left[\frac{3}{e}; 3e\right]$

$\operatorname{dom}_d f = \left]\frac{3}{e}; 3e\right[$

$\forall x \in \left]\frac{3}{e}; 3e\right[: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2\left(\frac{3}{x}\right)}} \cdot \left(-\frac{\cancel{3}}{x^2}\right) \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{3}}$

$= -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2\left(\frac{3}{x}\right)}}$

2) a) $4\log_9(2x-1) - \log_3(3x-2x^2) = \log_3(4x-3) + \log$

C.E
- $2x-1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$
- $3x-2x^2 > 0 \iff x(3-2x) > 0$
  $\iff 0 < x < \frac{3}{2}$
- $4x-3 > 0 \iff x > \frac{3}{4}$
- $x > 0$

$\operatorname{dom}(E) = \left]\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right[$

$\forall x \in \operatorname{dom}(E)$:

$(E) \iff 4\frac{\log_3(2x-1)}{\log_3 9} - \log_3(3x-2x^2) = \log_3(4x-3) - \log_3 x$

$\iff 2\log_3(2x-1) - \log_3(3x-2x^2) = \log_3(4x-3) - \log_3 x$

$\iff \log_3(2x-1)^2 + \log_3 x = \log_3(4x-3) + \log_3(3x-2x^2)$

$\iff x(2x-1)^2 = (4x-3)(3x-2x^2) \quad (\log_3 \text{ bij})$

$\iff x(2x-1)^2 = x(4x-3)(3-2x) \quad \Big| : \underset{\neq 0}{x}$

$\iff 4x^2-4x+1 = 12x-8x^2-9+6x$

$\iff 12x^2-22x+10 = 0$

$\iff 6x^2-11x+5 = 0$

$\iff x = 1 \text{ ou } x = \frac{5}{6}$

$S = \left\{1; \frac{5}{6}\right\}$

b) $2^{-x} > \dfrac{2}{2^{-x}-1}$ (I)

C.E $\quad 2^{-x}-1 \neq 0 \Leftrightarrow 2^{-x} \neq 2^{0}$
$\Leftrightarrow x \neq 0$

$\text{dom}(I) = \mathbb{R}_0$

$\forall x \in \mathbb{R}_0 : (I) \Leftrightarrow 2^{-x} - \dfrac{2}{2^{-x}-1} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2^{-2x} - 2^{-x} - 2}{2^{-x}-1} > 0$

posons : $2^{-x} = u \; (>0)$

(I) devient $\underbrace{\dfrac{u^2-u-2}{u-1}}_{E(u)} > 0 \quad (I')$

u		-1		0		1		2	
u^2-u-2	$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$
$u-1$	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$
$E(u)$	$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$

$(I') \Leftrightarrow 0 < u < 1$ ou $u > 2$

$(I) \Leftrightarrow 2^{-x} < 1$ ou $2^{-x} > 2$

$\Leftrightarrow -x < 0$ ou $-x > 1$

$\Leftrightarrow x > 0$ ou $x < -1$

$S = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

3) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = \dfrac{1}{e}$

En effet $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x}$ f.i. "$\frac{0}{0}$"

$\overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

$= -1$

Question 3

1) • $A = \displaystyle\int_0^{2/3} \frac{2x-1}{\sqrt{16-9x^2}}\,dx$

$F(x) = \displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{16-9x^2}}\,dx$

$= -\dfrac{1}{9}\displaystyle\int \underbrace{(-9)2x}_{u'(x)} \underbrace{(16-9x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{[u(x)]^{-1/2}}\,dx - \dfrac{1}{3}\int \frac{\overbrace{3}^{u'(x)}}{4\sqrt{1-\underbrace{\left(\frac{3x}{4}\right)^2}_{[u(x)]^2}}}\,dx$

$= -\dfrac{2}{9}\sqrt{16-9x^2} - \dfrac{1}{3}\,\text{Arc}\sin\left(\dfrac{3x}{4}\right) + k$

$A = F\left(\frac{2}{3}\right) - F(0) = -\dfrac{4}{9}\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{8}{9}$

• $B = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

$F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{1+\frac{1}{1+\tan^2 x}} = \int \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x}\,dx$

$= \sqrt{2}\displaystyle\int \frac{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\tan^2 x\right)}^{u'(x)}}{2\left(1+\underbrace{\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)^2}_{[u(x)]^2}\right)}\,dx$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\text{Arc}\tan\left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + k$

$B = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\text{Arc}\tan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

• $C = \displaystyle\int_{-1}^{0} x \log_2(1-x)\,dx$

$u(x) = \log_2(1-x) \qquad v'(x) = x$

$u'(x) = -\dfrac{1}{(1-x)\ln 2} \qquad v(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

$C = \dfrac{1}{2}\left[x^2 \log_2(1-x)\right]_{-1}^{0} + \dfrac{1}{2\ln 2}\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1-x}\,dx$

$= \dfrac{1}{2}(0-1) - \dfrac{1}{2\ln 2}\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1+1}{x-1}\,dx$

$= -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\ln 2}\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

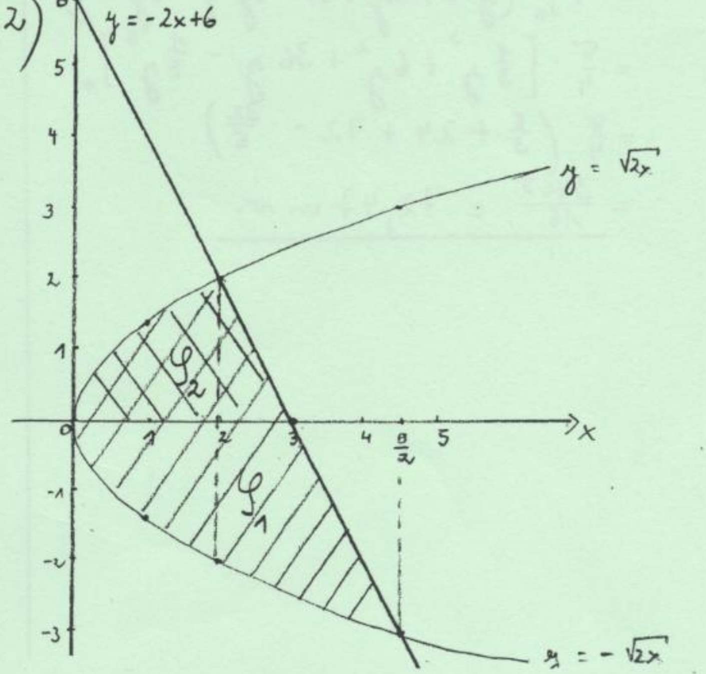
$= -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\ln 2}\left[\dfrac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1|\right]_{-1}^{0}$

$= -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\ln 2}\left(0 - \dfrac{1}{2} + 1 - \ln 2\right)$

$= -\cancel{\dfrac{1}{2}} - \dfrac{1}{4\ln 2} + \cancel{\dfrac{1}{2}}$

$= -\dfrac{1}{4\ln 2}$

2)



a) <u>abscisses des pts d'intersection</u>

$$M(x;y) \in \mathcal{P} \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x & (1) \\ y = -2x+6 & (2) \end{cases}$$

(2) dans (1) : $4x^2 - 24x + 36 = 2x$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 13x + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{9}{2}$$

$$\mathcal{A} = 2\int_0^2 \sqrt{2x}\, dx + \int_2^{9/2} \left(-2x+6+\sqrt{2x}\right) dx$$

$$F(x) = \int \sqrt{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int (2x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x)^3} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \left(F(2) - F(0)\right) + F\left(\tfrac{9}{2}\right) - F(2) + \left[-x^2+6x\right]_2^{\frac{9}{2}}$$

$$= F(2) - 2F(0) + F\left(\tfrac{9}{2}\right) - \frac{81}{4} + 27 + 4 - 12$$

$$= \frac{8}{3} + 9 - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{125}{12} \simeq 10{,}42 \text{ u.a.}$$

b) $y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y^2 \quad (y \geq 0)$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}y^4$$

$$y = -2x+6 \Leftrightarrow 2x = -y-6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-y-6)$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}(y+6)^2$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[\frac{1}{4}(y+6)^2 - \frac{1}{4}y^4\right] dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^2 \left(y^2 + 12y + 36 - y^4\right) dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}y^3 + 6y^2 + 36y - \frac{1}{5}y^5\right]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{8}{3} + 24 + 72 - \frac{32}{5}\right)$$

$$= \frac{346\pi}{15} \simeq 72{,}47 \text{ u.v.}$$

Corrigé : Problème V200

1) On cherche une fonct. polynôme f.

Les cond. de l'énoncé entraînent :

$$\begin{cases} f(50) = 160 & ① \\ f(100) = 150 & ② \\ f'(100) = 0 & ③ \\ f''(100) = 0 & ④ \\ f(150) = 100 & ⑤ \end{cases}$$

5 cond. donc le polyn. sera du 4e degré

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Le syst. d'éq. ne possède qu'une seule sol. à savoir

$a = -\frac{1}{312500}$; $b = \frac{13}{12500}$; $c = -\frac{3}{25}$; $d = \frac{28}{5}$; $e = 70$

Il y a donc au plus un polyn. du 4e degré possédant les prop. de l'énoncé. Il est déf. par

$$f(x) = -\frac{1}{312500}x^4 + \frac{13}{12500}x^3 - \frac{3}{25}x^2 + \frac{28}{5}x + 70$$

Est-ce que ce polyn. f vérifie les 5 cond. ?

1) $f(50) = 160$ la cond. ① est vérifiée

2) $f(100) = 150$ la cond. ② est vérifiée

3) $f'(x) = -\frac{(x-100)^2 \cdot (4x-175)}{312500}$ f' s'annule (mais ne change pas de signe en $x_0 = 100$

(100 est racine double de f')

4) $f''(x) = -\frac{3(x-100)(2x-125)}{156250}$ f'' s'annule et change de signe en $x_0 = 100$

(100 est une racine simple de f'')

les cond. ③ et ④ sont vérifiées

$I(100 ; 150)$ est un pt d'infl. à tangente horiz.

5) $f(150) = 100$ la cond. 5 est vérifiée.

Donc le polyn. f vérifie toutes les cond.

2) vitesse de croissance $\varphi(t) = \dfrac{2500 \cdot k \cdot e^{kt}}{(4e^{kt}+50)^2} \cdot h$ $(k, h \in \mathbb{R}_+^*)$

Pour déterminer le moment où la vitesse de croissance est maximale il faut étudier la fonct. dérivée φ'.

$$\varphi'(t) = \frac{-625\, h \cdot k^2 \cdot e^{kt}\,(2e^{kt}-25)}{(2e^{kt}+25)^3}$$

signe donné par : $-(2e^{kt} - 25)$

$2e^{kt} - 25 < 0 \iff t < \dfrac{\ln\frac{25}{2}}{k}$

$2e^{kt} - 25 = 0 \iff t = \dfrac{\ln\frac{25}{2}}{k}$

$2e^{kt} - 25 > 0 \iff t > \dfrac{\ln\frac{25}{2}}{k}$

t	0		$\frac{\ln\frac{25}{2}}{k}$		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
φ		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

La vitesse de croissance est donc maximale pour :

$$t_m = \frac{\ln\frac{25}{2}}{k}$$

3) Le graphe de φ_k pour $k \in \{1; 3; 5\}$ p. ex. montre que si k augmente le maximum se déplace vers la gauche, en d'autres termes la croissance est plus rapide.

4) $\varphi'(1) = 0 \underset{V200}{\Leftrightarrow} k = \frac{\ln\frac{25}{2}}{1}$ ou $\underbrace{k = 0 \text{ ou } h = 0}_{\substack{\text{à exclure car} \\ k,\, h \in \mathbb{R}_+^*}}$

Donc pour $k = \ln\frac{25}{2} \simeq 2,52$ la vitesse de croissance est maximale après 1 an.

La valeur de h n'a pas d'influence : $h \in \mathbb{R}_+^*$

5) Cherchons la fonct. donnant la taille d'un kangourou en fonct. du temps.

Si φ est la vitesse de croissance, la fonct. taille est donnée par la primitive Ψ de φ satisfaisant $\Psi(0) = 2,5$ (taille du kangourou à la naissance)

$$\Psi(t) = 2,5 + \int_0^t \varphi(x)\,dx$$

$$\underset{V200}{=} 2,5 + \frac{625\,h}{54} - \frac{625\,h}{2\,(2e^{kt} + 25)}$$

6) $k = \ln\frac{25}{2}$; $h = 15,33$

taille finale : $\lim_{t \to +\infty} \Psi(t) = 179,9$ cm