Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2007	**Numéro d'ordre du candidat**
Section: B	
Branche: Math II	

I

A. Soit la fonction $g : x \to g(x) = \ln^2 x + \ln x - 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $g(x) \geq 0$.
2. Dresser le tableau des signes de la fonction g.

B. On considère la fonction $\boxed{f : x \to f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}}$

1. Etudier f :
   domaines de définition, de continuité et de dérivabilité,
   limites aux bornes et asymptotes éventuelles,
   calcul de la dérivée et étude de son signe,
   tableau de variation.
2. Esquisser la courbe représentative G_f dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.
3. Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par G_f, l'axe des x et les deux droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$ où $1 < \lambda < e$.
   a) Déterminer λ de façon que $A(\lambda) = \dfrac{\pi}{6}$.
   b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to e} A(\lambda)$.

(2+1)+(7+2+4)=16 points

II

Soit la fonction $\boxed{f : x \to f(x) = \sqrt{x}\, e^{1-x^2}}$.

1. Etudier f :
   domaines de définition et de continuité, comportement asymptotique,
   dérivabilité et calcul de la dérivée, en particulier dérivabilité en 0,
   domaine de dérivabilité, signe de la dérivée,
   calcul de la dérivée seconde et étude de son signe,
   tableau de variation avec indications sur la concavité.

Tsvp

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2007 **Section: B** **Branche: Math II**	**Numéro d'ordre du candidat** ________________

2. Esquisser la courbe représentative G_f dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

3. Trouver le *volume* $V(\lambda)$ du solide engendré par la révolution autour de l'axe x de la surface comprise entre G_f, l'axe x, les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\lambda$ avec $\lambda>1$.

   a) Déterminer λ de façon que $V(\lambda)=\dfrac{\pi}{8}$.

   b) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} V(\lambda)$.

12+2+(3+1)=18 points

III

a) Soit la fonction $f: x \to f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2) Etudier la dérivabilité au point d'abscisse 0 de la fonction prolongée.

b) Soit x tel que $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$. Calculer $F(x)=\int_0^x (\tan t+\tan^3 t)\,dt$, puis $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} F(x)\,dx$.

c) Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

1) Calculer la dérivée f' de f et en déduire $I=\int_{\sqrt{2}}^{2} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

2) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int f(x)\,dx$.

(2+2)+3+(2+2)=11 points

IV) Problème

Les populations de souris se développent en cycles : elles augmentent d'abord de x % par mois et si la population a atteint 3000 souris par hectare, on observe un effondrement instantané de la population, (causé par une diminution du taux de glycémie dans le sang due à un manque de nourriture,) qui réduit la population à $\frac{1}{30}$ de sa taille. Ensuite le cycle reprend.

1) a) Justifier que la taille de la population de souris sur un hectare au temps t pendant un tel cycle peut être modélisée par une fonction de la forme $s : t \mapsto p \cdot k^t$

avec $s(t) \leq 3000$; $k > 1$ et où $p>0$ désigne la population initiale et $t \geq 0$ le temps en mois.

Déterminer cette fonction si l'on sait que la population croît de 7% par mois et que l'on a une population initiale de 100 souris par hectare. (On trouve $p = 100$; $k = 1{,}07$.)

b) Combien de temps faut-il à cette population pour atteindre sa taille maximale ?

En déduire le temps d'un cycle complet c'est-à-dire le temps entre deux effondrements consécutifs de la population.

c) Calculer le nombre moyen de souris présentes pendant un cycle complet.

2) a) On veut maintenant combattre cette invasion de souris.

Pour ce faire on extermine par différents moyens 3% de la population par mois.

Quel est alors le temps d'un cycle complet et le nombre moyen de souris par cycle ?

Que constate-t-on ?

b) Déterminer le temps d'un cycle complet et le nombre moyen de souris par cycle sous forme générale, c'est-à-dire si l'on extermine par différents moyens α % de la population par mois (avec $0 < \alpha < 7$).

Quelles conclusions en tirer à long terme ?

3) Déterminer une fonction polynôme du 4^e degré qui décrit la taille de la population au cours d'un cycle pour une croissance de 7%, en tenant compte du fait qu'elle est lente au début.

Juger de la qualité de ce modèle.

[(2+2+2)+(2+3)+4=15 points]