Épreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2006

Section: B

Branche: Mathématiques II

Nom et prénom du candidat

____

____

I) On considère la fonction $f(x)=\dfrac{2}{x\cdot(1+\ln^2 x)}$.

1) Étudier f :

a) Calculer le domaine de définition, les limites aux bornes du domaine et les asymptotes.

b) Déterminer le domaine de dérivabilité, la dérivée première et le tableau de variation.

c) Vérifier avec la V200 que

$$f''(x)=4\,\frac{(\ln x+1)(\ln^2 x+2\ln x+3)\ln x}{x^3\cdot(1+\ln^2 x)^3}.$$

Analyser alors sans la V200 la concavité de $\mathcal{C}_f$ et trouver la (les) tangente(s) au(x) point(s) d'inflexion éventuel(s).

d) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

2) Soit $\lambda>1$. Trouver l'aire de la partie P du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des x et et les droites d'équation $x=\lambda^{-1}$ et $x=\lambda$. En déduire $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

(3 + 3 + 4 + 2) + 2 = 14 points

II) On donne la fonction $f(x)=\begin{cases}(x-1)e^x & \text{si } x\leqslant 0\\ x^2(1-2\ln x)-1 & \text{si } x>0\end{cases}$.

1) Trouver $dom f$, analyser la continuité en 0 et préciser $dom_c f$.

2) Déterminer les limites aux bornes du domaine et les asymptotes éventuelles de la courbe $\mathcal{C}_f$.

3) Calculer la dérivée de f, analyser en particulier la dérivabilité de f en 0 et préciser $dom_d f$.

4) Dresser le tableau de variation de f, tracer $\mathcal{C}_f$ et montrer que f est injective sur $[0,1]$.

5) Soit $\alpha\in\,]0,1[$ et P la partie du plan délimitée par la courbe, la droite $y=f(\alpha)$ ainsi que les deux axes Ox et Oy. Déterminer le volume $V(\alpha)$ du solide de révolution obtenu par rotation de P autour de l'axe Oy. En déduire la limite $\lim\limits_{\alpha\to0+} V(\alpha)$.

(3 + 2 + 3 + 4) + 4 = 16 points

Indication pour 5): *Poser $y=f(x)$, calculer dy et en déduire le volume, sans passer par le calcul de la réciproque de f.*

III) 1) Indiquer la relation entre $\log_a b$ et $\log_b a$. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3\log^2_{\frac{1}{3}}x+7\log_{\frac{1}{3}}x-7=\log_x\left(\frac{1}{27}\right)$.

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{\frac{4x}{3}-1}$ et $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(\operatorname{Arctan}x)}{\ln(x)}$.

3) Trouver, sur un intervalle I à préciser, la primitive de $f(x)=x\sqrt{3-x}$ qui s'annule en $x=2$.

4) Calculer : $J=\displaystyle\int_0^1 e^{e^x+x}\,dx$, $K=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$ et $L=\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arcsin}^2 y\,dy$.

4 + 2 + 3 + 6 = 15 points

Remarque *: Pour les trois exercices d'en haut, la V200 est uniquement autorisée dans les cas explicitement mentionnés* (I)1)c)) *ainsi que les cas suivants : la résolution d'équations rationnelles et irrationnelles ne contenant pas des logarithmes et/ou des exponentielles, la décomposition de fractions rationnelles, la linéarisation de produits trigonométriques et la substitution des bornes dans le calcul final d'une intégrale définie ainsi que son évaluation numérique.*

Tous les autres calculs sont à faire à la main.

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2006 Section: **B** Branche: **Mathématique II**	**Nom et prénom du candidat** ________ ________ ________ ________

Question « V200 » : **Section d'un tunnel**

Pour des raisons de statique la construction à section carrée d'un tunnel doit débuter par la construction d'un tunnel à section parabolique . La section carrée doit toucher la section parabolique et avoir une aire de 16 m^2 . Les points de contacts sont $P(2\,;4)$ et $Q(-2\,;4)$ (voir fig. 1) .

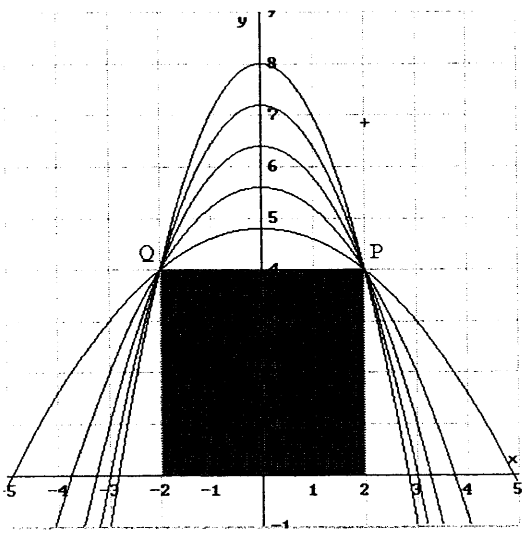

fig. 1

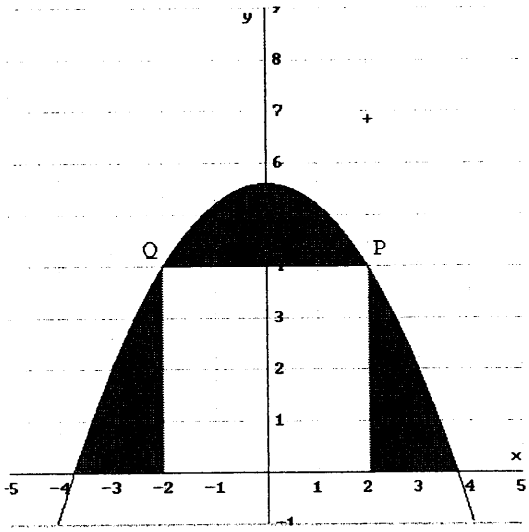

fig. 2

1) Les fonctions décrivant les paraboles devant être de la forme $-ax^2+bx+c$, déterminer les paramètres b et c en fonction de a . Expliquer pourquoi a doit être strictement positif .

2) Déterminer l'aire $A(a)$ de la section parabolique du tunnel .

3) Soit g la fonction représentant la partie non utile de la section parabolique du tunnel (voir fig. 2) . Cette partie non utile doit être minimale . Etudier la fonction g (domaine , limites , dérivée , extrémums) .

4) Calculer le pourcentage de la partie non utile (minimale) .

5) Soit la fonction h définie par $h(a)=\dfrac{32(a+1)}{3}\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}-16$. A-t-on $g=h$?

(Justifier)

(15 points)