LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES

Session 2016

ÉPREUVE ÉCRITE	**Branche : Mathématiques II**
Section(s) : B	**N°d'ordre du candidat :**
Date de l'épreuve : 23 mai 2016	**Durée de l'épreuve : 4 h**

Question I ((3 + 3) + 6 = 12 points)

1) Résoudre : **a)** $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1})$

b) $\log_{x+2}(2x) = \log_{2x}(x+2)$

2) On donne l'équation $(m+1)e^{x} - (m-1)e^{-x} = 2m$ ($m \in \mathbb{R}$).

Discuter le nombre de solutions de cette équation suivant les valeurs de *m*.

Question II (1 + 5 + 8 + 2 + 2 + 4 = 22 points)

On donne la fonction *f* définie par $f(x) = x \cdot \ln\dfrac{x+1}{x}$

1) Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de *f*.

2) Etudier le comportement asymptotique de la fonction *f*.

3) **a)** Déterminer la fonction dérivée *f '* de *f*.

b) Déterminer les limites à l'infini de *f '* et étudier les variations de la fonction dérivée *f '* .

c) En déduire le signe de la fonction dérivée *f '*.

d) Dresser le tableau des variations et de concavité de la fonction *f*.

4) Représenter *f* dans un repère orthonormé du plan.

5) Déterminer algébriquement les coordonnées du point M du graphe de *f* admettant une tangente au graphe de *f* passant par le point P(0 ; 2).

6) Soit $\alpha \in \,]0\,;1]$. Déterminer l'aire $A(\alpha)$ de la partie délimitée par le graphe de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$. En déduire $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} A(\alpha)$.

Question III (3 + 3 = 6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\left(\frac{1}{x}\right)}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1) Vérifier que f est continu en 0 et justifier que O(0 ; 0) est un point anguleux du graphe de f.

2) Etudier le comportement asymptotique de f à l'infini.

Question IV (3 + 3 = 6 points)

1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \ln(1+\cos x)\, dx$.

2) On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 1}$.

Déterminer la primitive F de f sur]1 ; +∞[qui s'annule en $\sqrt{3}$.

(Indication : Déterminer a, b, c, d ∈ ℝ tels que $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$ $\forall\, x \in\ ]1\ ;\ +\infty[$ *.)*

Question V (8 points)

Dans un repère orthonormé du plan, on donne le cercle c de centre A(3 ; 0) et de rayon 3 et la parabole p d'équation $x^2 - \sqrt{2}y = 0$.

1) Faire une figure, puis déterminer algébriquement les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes.

2) Déterminer la valeur exacte et une valeur arrondie au centième de l'aire de la surface fermée délimitée par ces deux courbes et contenant le point P(1 ; 1).

Question VI (6 points)

Soit f la fonction définie sur [0 ; π] par $f(x) = \sin(x) \cdot e^{\left(\frac{x}{2}\right)}$

Déterminer la valeur exacte et une valeur arrondie au millième du volume du solide engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de la surface comprise entre le graphe de f (ci-contre) et l'axe des abscisses.