Question 1 (4+6+6 = 16 points)

a) $\boxed{\dfrac{4^x-3\cdot 2^x+2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1}=\dfrac{1}{2}}$

<u>C.E.</u> : $\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$

$\left(\forall x\in D=\mathbb{R}^*\right)$:

$$\frac{4^x-3\cdot 2^x+2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cdot\left[2^{2x}-3\cdot 2^x+2\right]=2^{-x}-1$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cdot\left(2^x\right)^3-6\cdot\left(2^x\right)^2+5\cdot 2^x-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2^x=1\vee 2^x=\tfrac{2-\sqrt{2}}{2}\vee 2^x=\tfrac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ x=\underbrace{\boxed{0}}_{\notin D}\vee x=\underbrace{\boxed{\frac{\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}{\ln(2)}}}_{\approx -1,77\in D}\vee x=\underbrace{\boxed{\frac{\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)}{\ln(2)}}}_{\approx 0,77\in D}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}{\ln(2)};\frac{\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)}{\ln(2)}\right\}}$$

b) $\boxed{\ln(x+1)-\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|}{2}\leq\ln\left(\sqrt{2}\right)}$

<u>C.E.</u> : $x+1>0\wedge x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x>-1\wedge x\neq 1\Leftrightarrow x\in D=\left]-1;+\infty\right[\setminus\{1\}$

$\left(\forall x\in D_1=\left]-1;1\right[\right)$:

$$\ln(x+1)-\frac{\ln\left|x^2-1\right|}{2}\leq\ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 2\ln(x+1)\leq\ln\left(1-x^2\right)+\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(x+1)^2\leq\ln\left[2\left(1-x^2\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+2x+1\leq 2-2x^2$$

$$\Leftrightarrow\ 3x^2+2x-1\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\ -1\leq x\leq\tfrac{1}{3}$$

$S_1=\left]-1;\tfrac{1}{3}\right]$

$\left(\forall x\in D_2=\left]1;+\infty\right[\right)$:

$$\ln(x+1)-\frac{\ln\left|x^2-1\right|}{2}\leq\ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 2\ln(x+1)\leq\ln\left(x^2-1\right)+\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(x+1)^2\leq\ln\left[2\left(x^2-1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+2x+1\leq 2x^2-2$$

$$\Leftrightarrow\ -x^2+2x+3\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\ x\leq -1\vee x\geq 3$$

$S_2=\left[3;+\infty\right[$

$$\boxed{S=S_1\cup S_2=\left]-1;\tfrac{1}{3}\right]\cup\left[3;+\infty\right[}$$

c) $\boxed{\left[2e^x\ln(3x)\right]^2+4<16e^{2x}+\ln^2(3x)}$

<u>C.E.</u> : $x>0$

$\left(\forall x\in D=\left]0;+\infty\right[\right)$:

$$\left[2e^x\ln(3x)\right]^2+4<16e^{2x}+\ln^2(3x)$$

$\Leftrightarrow\ 4e^{2x}\ln^2(3x)+4-16e^{2x}-\ln^2(3x)<0$

$\Leftrightarrow\ \ln^2(3x)\left(4e^{2x}-1\right)-4\left(4e^{2x}-1\right)<0$

$\Leftrightarrow\ \left(\ln^2(3x)-4\right)\left(4e^{2x}-1\right)<0$

$\Leftrightarrow\ \left(\ln(3x)-2\right)\left(\ln(3x)+2\right)\left(2e^x-1\right)\underbrace{\boxed{\left(2e^x+1\right)}}_{>0\ (\forall x\in\mathbb{R})}<0$

$\Leftrightarrow\ \underbrace{\boxed{\left(\ln(3x)-2\right)\left(\ln(3x)+2\right)\left(2e^x-1\right)}}_{p(x)}<0$

$\ln(3x)-2>0\Leftrightarrow x>\underbrace{\boxed{\frac{e^2}{3}}}_{\approx 2,46}$ $\qquad \ln(3x)+2>0\Leftrightarrow x>\underbrace{\boxed{\frac{e^{-2}}{3}}}_{\approx 0,05}$ $\qquad 2e^x-1>0\Leftrightarrow x>\underbrace{\boxed{-\ln(2)}}_{\approx -0,69}$

<u>Tableau des signes</u>

x	0		$\frac{e^{-2}}{3}$		$\frac{e^2}{3}$		$+\infty$
$\ln(3x)-2$	‖	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\ln(3x)+2$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2e^x-1$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$p(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{S=\left]\frac{e^{-2}}{3};\frac{e^2}{3}\right[}$

<u>Question 2 (6+4 = 10 points)</u>

a) <u>C.E.</u> $3x>0\Leftrightarrow x>0$

dom f = dom $f'=\left]0;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\underbrace{\boxed{\ln(3x)}}_{\to-\infty}-\underbrace{\boxed{2x^2}}_{\to0}+\underbrace{\boxed{3x}}_{\to0}+2\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\boxed{\ln(3x)}}_{\to+\infty}-\underbrace{\boxed{2x^2}}_{\to+\infty}+\underbrace{\boxed{3x}}_{\to+\infty}+2\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\boxed{x^2}}_{\to+\infty}\left(\underbrace{\boxed{\frac{\ln(3x)}{x^2}}}_{\to0}-2+\underbrace{\boxed{\frac{3}{x}}}_{\to0}+\underbrace{\boxed{\frac{2}{x^2}}}_{\to0}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\boxed{\ln(3x)}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\boxed{x^2}}_{\to+\infty}}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$: $f'(x)=\frac{1}{x}-4x+3=\frac{-4x^2+3x+1}{x}=\frac{(x-1)(-4x-1)}{x}$

Tableau des variations

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$\underbrace{\boxed{3+\ln(3)}}_{\approx 4{,}10>0}$	$\searrow$	$-\infty$

D'après le tableau des variations, on conclut que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 \in]0;1[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$ $\quad$ [pas demandé : $x_1 = 0,0401...$; $x_2 = 2,3429...$]

b) Notons t_a la tangente à C_f au point d'abscisse a de C_f, alors $(\forall a \in \text{dom } f = \text{dom } f' =]0;+\infty[)$:

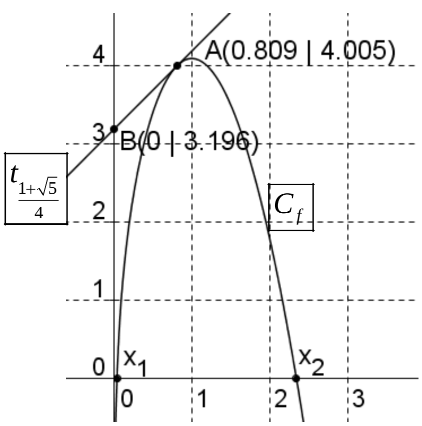
$$t_a \,//\, d: y = x \Leftrightarrow f'(a) = 1 \Leftrightarrow \tfrac{-4a^2+3a+1}{a} = 1 \Leftrightarrow -4a^2+2a+1=0 \Leftrightarrow a = \underbrace{\boxed{\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}}}_{\approx -0{,}31 \notin]0;+\infty[} \vee a = \underbrace{\boxed{\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}}}_{\approx 0{,}81 \in]0;+\infty[}$$

L'unique tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = x$ est celle au point d'abscisse $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. On a:

$$t_{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}: y = 1\cdot\left(x - \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + f\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \Leftrightarrow y = x - \tfrac{1+\sqrt{5}}{4} + \ln\left(\tfrac{3\sqrt{5}+3}{4}\right) + \tfrac{\sqrt{5}}{2} + 2 \Leftrightarrow y = x + \underbrace{\boxed{\ln\left(\tfrac{3\sqrt{5}+3}{4}\right) + \tfrac{\sqrt{5}+7}{4}}}_{\approx 3{,}196}$$

$$(Oy) \cap t_{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \{B(0;\approx 3{,}196)\}$$

Représentation graphique (pas demandée !)



Question 3 (8+7 = 15 points)

a) <u>C.E.</u> $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

$\text{dom } f = \text{dom } f' = \left]-1;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \underbrace{\boxed{\ln\left(\underbrace{\boxed{\frac{x+1}{x^2+1}}}_{\to 0^+}\right)}}_{\to-\infty} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\boxed{\ln\left(\underbrace{\boxed{\frac{x+1}{x^2+1}}}_{\to 0^+}\right)}}_{\to-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\boxed{\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)}}^{\to-\infty}}{\underbrace{\boxed{x}}_{\to+\infty}} \underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\frac{1(x^2+1)-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}}{\frac{x+1}{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^3} = 0$$

C_f admet une $A.V.: x=-1$ et une $B.P.D.$ dont la direction asymptotique est celle de (Ox).

$\left(\forall x \in \left]-1;+\infty\right[\right)$:

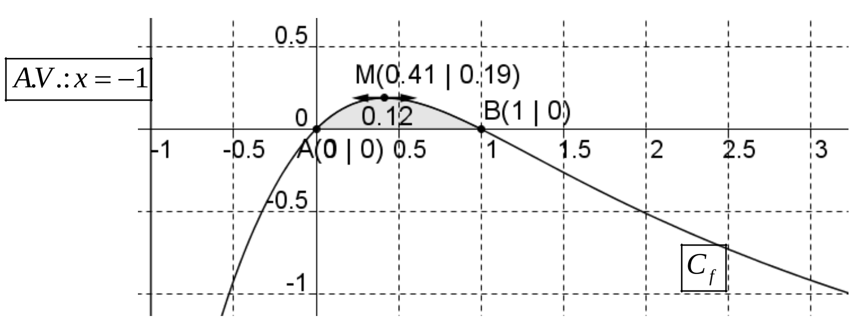
$$f'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x = \underbrace{\boxed{-1-\sqrt{2}}}_{\notin\left]-1;+\infty\right[} \vee x = \underbrace{\boxed{\sqrt{2}-1}}_{\in\left]-1;+\infty\right[}$$

<u>Tableau des variations</u>

x	-1		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$\underbrace{\boxed{\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)}}_{\approx 0,19>0}$	$\searrow$	$-\infty$

<u>Représentation graphique</u>



b) $\left(\forall x\in\left]-1;+\infty\right[\right):\ f\left(x\right)=0\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)=0\Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+1}=1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=1\ ;\ \boxed{S=\left\{0;1\right\}}$

$A=\int_0^1\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx$

I.p.p.

$u(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$	$v(x)=x$
$u'(x)=\frac{-x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)}$	$v'(x)=1$

A

$=\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\right]_0^1+\int_0^1\frac{x^3+2x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}dx$

$=\int_0^1\left(1+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$

$=\left[x+\ln\left|x+1\right|-2\arctan\left(x\right)\right]_0^1$

$=\boxed{1+\ln\left(2\right)-\frac{\pi}{2}u.a.}$

$\approx\ 0{,}12u.a.$

$$\frac{x^3+2x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}=1+\frac{x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}=1+\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

$\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}\right)$:

$$\frac{x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\b+c=-2\\a+c=-1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow a=1\wedge b=0\wedge c=-2$

Question 4 (4+7 = 11 points)

a) Équation de la parabole

$S\left(\frac{14}{3};\frac{166}{9}\right)$ est le sommet de la parabole P, donc P: $y=a\left(x-\frac{14}{3}\right)^2+\frac{166}{9}$

$A\left(0;13\right)\in$ P $\Leftrightarrow 13=a\left(0-\frac{14}{3}\right)^2+\frac{166}{9}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$

P: $y=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{14}{3}\right)^2+\frac{166}{9}=-\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{3}x+13$

$c: x^2+y^2=13^2\wedge y\geq 0$

$-\frac{1}{4}\left(x_B-\frac{14}{3}\right)^2+\frac{166}{9}=-\frac{1}{4}\left(12-\frac{14}{3}\right)^2+\frac{166}{9}=5\Rightarrow B\left(12;5\right)\in$ P

$x_B^2+y_B^2=12^2+5^2=169=13^2\Rightarrow B\left(12;5\right)\in c$

b) $\sin\left(\widehat{BOA}\right)=\frac{x_B}{OB}\Rightarrow\widehat{BOA}=\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$

A

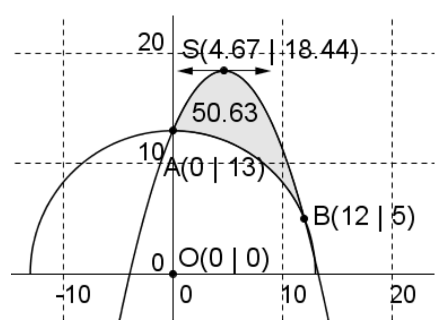
$=\int_0^{12}\left(-\frac{1}{4}\left(x-\frac{14}{3}\right)^2+\frac{166}{9}\right)dx-\frac{13^2\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)}{2}-\frac{x_By_B}{2}$

$=\left[-\frac{1}{12}\left(x-\frac{14}{3}\right)^3+\frac{166}{9}x\right]_0^{12}-\frac{169\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)}{2}-\frac{12\cdot 5}{2}$

$=\frac{15266}{81}-\frac{686}{81}-\frac{169\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)}{2}-30$

$=\boxed{150-\frac{169\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)}{2}u.a.}$

$\approx\ 50{,}63u.a.$



OU

$$A=\int_0^{12}\left(-\tfrac{1}{4}\left(x-\tfrac{14}{3}\right)^2+\tfrac{166}{9}-\sqrt{13^2-x^2}\right)dx$$

$$=\left[-\tfrac{1}{12}\left(x-\tfrac{14}{3}\right)^3+\tfrac{166}{9}x-\frac{169\arcsin\left(\frac{x}{13}\right)}{2}+\frac{x\sqrt{169-x^2}}{2}\right]_0^{12}$$

$$=\boxed{150-\frac{169\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)}{2}\,u.a.}$$

Question 5 (8 points)

Volume du flotteur

$$V_{flotteur}$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\left[\sin^2\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right]^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\sin^4\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos^2\left(\tfrac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}ix}-e^{\frac{-1}{2}ix}}{2i}\right)^4\left(\frac{e^{\frac{1}{2}ix}+e^{\frac{-1}{2}ix}}{2}\right)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\int_0^{\pi}\left[\left(e^{\frac{1}{2}ix}-e^{\frac{-1}{2}ix}\right)\left(e^{\frac{1}{2}ix}+e^{\frac{-1}{2}ix}\right)\right]^2\left(e^{\frac{1}{2}ix}-e^{\frac{-1}{2}ix}\right)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\int_0^{\pi}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}-2+e^{-ix}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\int_0^{\pi}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\left(e^{ix}-2+e^{-ix}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\int_0^{\pi}\left(e^{3ix}-2e^{2ix}+e^{ix}-2e^{ix}+4-2e^{-ix}+e^{-ix}-2e^{-2ix}+e^{-3ix}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\int_0^{\pi}\left(2\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}-4\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}-2\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+4\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\int_0^{\pi}\left(2\cos(3x)-4\cos(2x)-2\cos(x)+4\right)dx$$

$$=\left[\tfrac{\pi}{96}\sin(3x)-\tfrac{\pi}{32}\sin(2x)-\tfrac{\pi}{32}\sin(x)+\tfrac{\pi}{16}x\right]_0^{\pi}$$

$$=\tfrac{\pi}{96}\sin(3\cdot\pi)-\tfrac{\pi}{32}\sin(2\cdot\pi)-\tfrac{\pi}{32}\sin(\pi)+\tfrac{\pi}{16}\cdot\pi-\left(\tfrac{\pi}{96}\sin(3\cdot0)-\tfrac{\pi}{32}\sin(2\cdot0)-\tfrac{\pi}{32}\sin(0)+\tfrac{\pi}{16}\cdot0\right)$$

$$=\boxed{\frac{\pi^2}{16}cm^3}\approx 0,62\,cm^3$$