Épreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2012 **Section: B** **Branche: Mathématiques 2**	**Numéro d'ordre du candidat** __________________

QUESTION 1 (4+3+6+2+3=18 points)

On considère la fonction *f* définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sqrt{-\ln x} & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 1-e^{\frac{x-1}{x^2}} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Déterminer le domaine de définition de *f*. Étudier la continuité et la dérivabilité de *f* en $x_0=1$.

b) Étudier l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de *f*.

c) Étudier le sens de variation de *f* et dresser un tableau de variation.

d) Établir une équation de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

e) Représenter *f* graphiquement dans un repère orthonormé du plan (unité : 2 *cm*).

QUESTION 2 (3+4+5+5=17 points)

a) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$$

b) Résoudre l'inéquation :

$$-e^{2x-\ln\frac{1}{3}}+5<-e^{x+\ln 2}$$

c) Résoudre l'équation de variable x :

$$\int_x^{2x}\ln t\,dt=0$$

d) Soit $a\in\mathbb{R}_0$. Déterminer la primitive de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}$ qui s'annule pour $x=a$.

QUESTION 3 (7+3=10 points)

Dans un repère orthonormé du plan, on considère l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>0$ et $b>0$.

a) En s'inspirant du calcul d'aire du cercle par intégration, calculer l'aire de cette ellipse.

b) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de cette ellipse autour de l'axe des abscisses.

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2012

Section: B

Branche: Mathématiques II

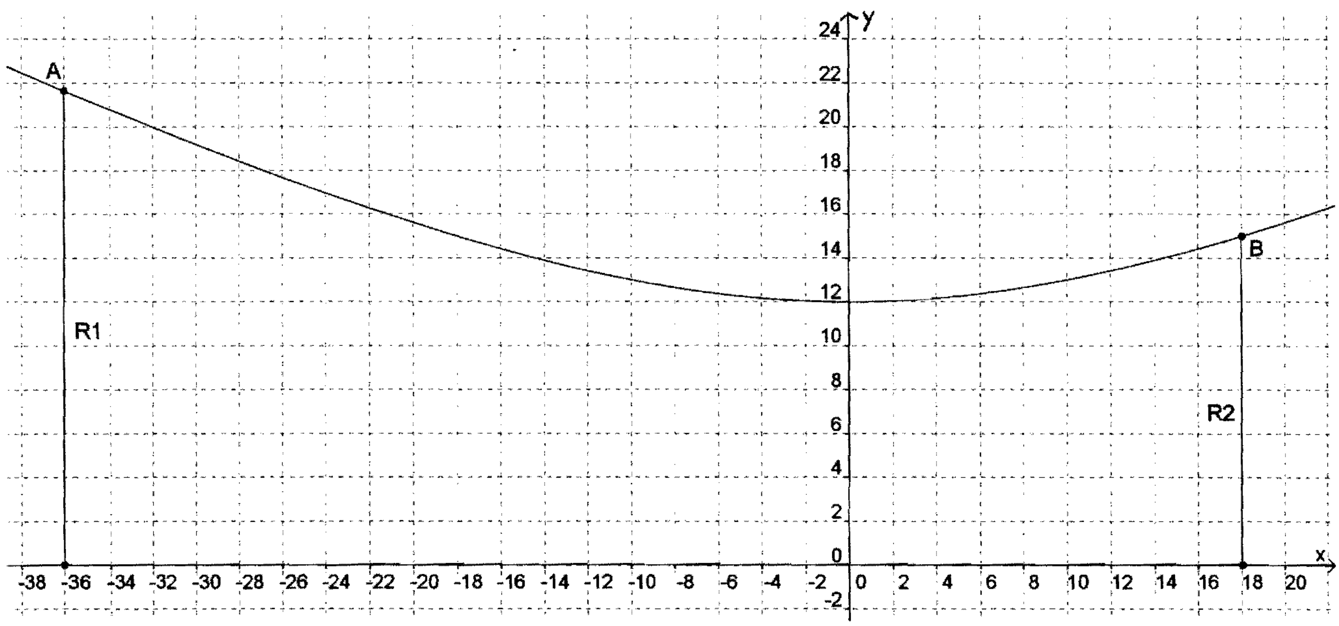
Numéro d'ordre du candidat

____

Problème V200 (15 points)

Remarques préliminaires :
- Tous les calculs de ce problème sont à faire à l'aide de la calculatrice TI-V200.
- Les résultats seront approchés à 10^{-2} près.
- La modélisation du problème, la présentation d'une réponse structurée et argumentée, la clarté des raisonnements, la maîtrise du vocabulaire et des notations mathématiques ainsi que la qualité de la rédaction interviendront dans l'appréciation de la copie.

Voici la coupe longitudinale (« Längsschnitt ») de la moitié de l'intérieur de la tour de refroidissement d'une centrale nucléaire. L'unité de la représentation graphique est le mètre.



Le volume intérieur de la tour de refroidissement est obtenu par la rotation autour de l'axe des x de la partie du plan délimitée par le graphe de la fonction f définie par $f(x) = 12 \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{576}}$, les droites d'équations $x = -36$, $x = 18$ et l'axe des x.

1) Calculer le volume intérieur de cette tour et son périmètre intérieur à la base (rayon R_1).

2) La stabilité de la tour exige que l'on fixe à l'intérieur un grand anneau en acier s'appuyant contre la paroi. Il doit être monté à une certaine hauteur de manière à ce qu'il partage la tour en deux parties de même volume. Calculer cette hauteur.

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2012

Section: B

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

3) Pour dessiner le bord extérieur de la paroi en béton, un ingénieur propose la fonction g définie par

$$g(x) = 14 \cdot \sqrt{1 + \frac{21x^2}{20480}}\ .$$

Trouver un argument qui démontre que cette fonction ne pourra guère être retenue.

4) On décide de considérer comme fonction décrivant le bord extérieur de la paroi la fonction h définie par

$$h(x) = 14 \cdot \sqrt{1 + \frac{3(x-5)^2}{2048}}\ .$$

a) Démontrer que l'épaisseur de la paroi diminue en allant du bas vers le haut de la tour.

b) Donner le volume de béton nécessaire pour construire la paroi de la tour.

5) Supposons qu'on veuille surveiller la base inférieure de la tour par une caméra fixée au centre de l'orifice (« Öffnung «) supérieur (rayon R_2).
Dans ce cas, il y a une zone de la base inférieure qui n'est pas surveillée par cette caméra.
Exprimer l'aire de cette zone (en pourcentage) par rapport à l'aire totale de la base inférieure.