examen 1B math ér

1) a. $3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}x+1} + 2^{2x-1}$ C.E. — ens. d'existence $\mathbb{R}$

$3^x + 2^{2x+1} = 3^{x+2} + 2^{2x-1}$

$3^x + 2\cdot 2^{2x} = 9\cdot 3^x + \frac{1}{2}2^{2x}$

$(2-\frac{1}{2})2^{2x} = (9-1)3^x$

$\frac{3}{2}2^{2x} = 8\cdot 3^x \quad |\cdot 2$

$3\cdot 2^{2x} = 16\cdot 3^x \quad |:(3\cdot 16)$

$2^{2x-4} = 3^{x-1}$

$(2x-4)\ln 2 = (x-1)\ln 3$

$x(2\ln 2 - \ln 3) = 4\ln 2 - \ln 3$

$x = \frac{4\ln 2 - \ln 3}{2\ln 2 - \ln 3} = \frac{\ln\frac{16}{3}}{\ln\frac{4}{3}}$ $\quad S = \left\{\frac{4\ln 2 - \ln 3}{2\ln 2 - \ln 3}\right\}$

b. $\ln(1+\ln(1+x)) \leq 0$ C.E. $1+x>0$ et $1+\ln(1+x)>0$

$\Leftrightarrow x>-1$ et $\ln(1+x)>-1$

$\Leftrightarrow x>-1$ et $1+x>e^{-1}$

$\Leftrightarrow x>-1+e^{-1}$

ens. d'existence $]-1+e^{-1}, +\infty[$

$\ln(1+\ln(1+x)) \leq 0 \Leftrightarrow 1+\ln(1+x) \leq 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq 0$

$\Leftrightarrow 1+x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

$S =]-1+e^{-1}, 0]$

c. $x^{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}^{\,x}$ C.E. $x>0$ ens. d'existence $\mathbb{R}_0^+$

$\sqrt{x}\ln x \geq x\ln\sqrt{x}$

$\sqrt{x}\ln x \geq \frac{1}{2}x\ln x \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\frac{1}{2}x)\ln x \geq 0$

* $\sqrt{x}-\frac{1}{2}x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 \geq (\frac{1}{2}x)^2$ (car $x>0$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - x \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2-4x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$

* $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

donc $S = [1;4]$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x)}{\tan x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x} \ln(\sin x)\,dx$

$\displaystyle = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln(\sin x)\right]' \cdot \ln(\sin x)\,dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}\ln^2(\sin x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln^2\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{2}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\ln 2\right)^2 = \frac{1}{8}\ln^2 2 - \frac{1}{2}\ln^2 2$

$\displaystyle = -\frac{3}{8}\ln^2 2$

e) $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)\,dx \qquad u(x) = \cos(\ln x) \quad u'(x) = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)$

$\qquad v'(x) = 1 \quad v(x) = x$

$\displaystyle = \left[x\cos(\ln x)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} + \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln x)\,dx$

$\qquad u(x) = \sin(\ln x) \quad u'(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln x)$

$\qquad v'(x) = 1 \quad v(x) = x$

$\displaystyle = e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 + \left[x\sin(\ln x)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} - \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)\,dx$

$\displaystyle = e^{\frac{\pi}{2}}\cdot 0 - 1 + \left(e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)\,dx$

$\displaystyle 2\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$

$\displaystyle \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

2) $f(x) = (x+3)e^{-\frac{1}{2}x}$

(a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = "(-\infty)\cdot(+\infty)" = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{x+3}{x}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = "1\cdot(+\infty)" = +\infty \Rightarrow$ branche parab. din Oy

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{x+3}{e^{\frac{1}{2}x}} \underset{(H)}{=} \lim \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}} = "\frac{1}{+\infty}" = 0 \Rightarrow$ as. hor. $y=0$

$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + (x+3)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} = \left(1-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$

$f''(x) = -\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}x} + (x+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}\right) = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}(x-1)e^{-\frac{1}{2}x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

x			-1		1	
$f'(x)$		+	0	−		−
$f''(x)$		−		−	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$	$\frac{4}{\sqrt{e}}$	$\searrow$ 0

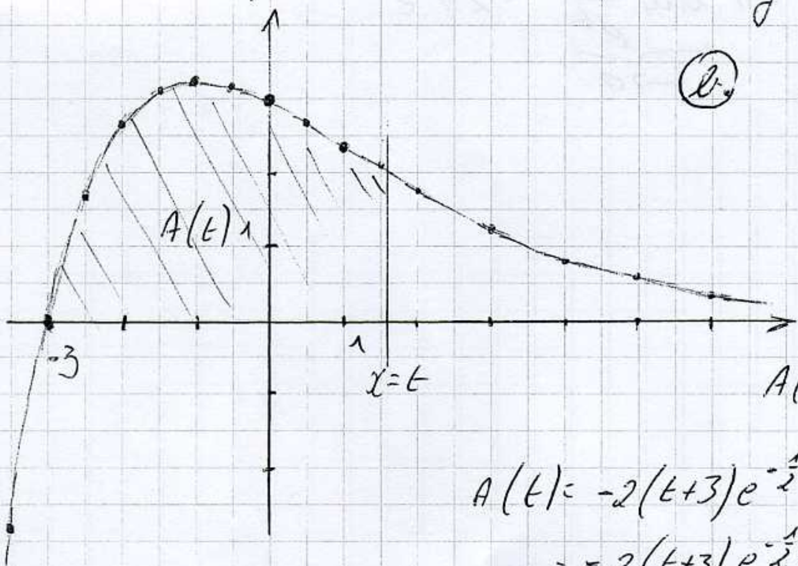
maximum $M(-1; 2\sqrt{e}) \sim (-1; 3{,}3)$

pt d'inflexion $I\left(1; \frac{4}{\sqrt{e}}\right) \sim (1; 2{,}4)$

tangente en I:

$y = -e^{-\frac{1}{2}}(x-1) + 4e^{-\frac{1}{2}}$

$y = -e^{-\frac{1}{2}}(x-5)$ $\quad y = -\frac{\sqrt{e}}{e}(x-5)$



(b) $A(t) = \int_{-3}^{t} f(x)\,dx$

$u(x) = x+3 \quad u'(x)=1$

$v'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \quad v(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}$

$A(t) = \left[-2(x+3)e^{-\frac{1}{2}x}\right]_{-3}^{t} + 2\int_{-3}^{t} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$

$A(t) = -2(t+3)e^{-\frac{1}{2}t} + 2\left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_{-3}^{t}$

$= -2(t+3)e^{-\frac{1}{2}t} + 2\left(-2e^{-\frac{1}{2}t} + 2e^{\frac{3}{2}}\right)$

$= (-2t-10)e^{-\frac{1}{2}t} + 4e^{\frac{3}{2}}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = 4e^{\frac{3}{2}} + \lim \frac{-2t-10}{e^{\frac{1}{2}t}} \underset{(H)}{=} 4e^{\frac{3}{2}} + \lim \underbrace{\frac{-2}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}}}_{\to 0} = 4e^{\frac{3}{2}}$

(c) $V(t) = \pi\int_{-3}^{t} [f(x)]^2\,dx = \pi\int_{-3}^{t} (x+3)^2 e^{-x}\,dx$

$u(x) = (x+3)^2 \qquad u'(x) = 2(x+3)$

$v'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = -e^{-x}$

$$V(t) = \pi\left(\left[-(x+3)^2 e^{-x}\right]_{-3}^{t} + 2\int_{-3}^{t} (x+3)e^{-x}\,dx\right)$$

$$= \pi\left(-(t+3)^2 e^{-t} + 2\int_{-3}^{t} (x+3)e^{-x}\,dx\right)$$

$u(x) = (x+3) \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = -e^{-x}$

$$V(t) = \pi\left(-(t+3)^2 e^{-t} + 2\left[(x+3)e^{-x}\right]_{-3}^{t} + 2\int_{-3}^{t} e^{-x}\,dx\right)$$

$$= \pi\left(-(t+3)^2 e^{-t} - 2(t+3)e^{-t} + 2\left[-e^{-x}\right]_{-3}^{t}\right)$$

$$= \pi\left(-(t+3)^2 e^{-t} - 2(t+3)e^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{3}\right)$$

$$= \pi\left((-t^2 - 8t - 17)e^{-t} + 2e^{3}\right)$$

$$\lim_{t \to +\infty} V(t) = 2\pi e^3 - \pi \lim \frac{t^2+8t+17}{e^t} \underset{(H)}{=} 2\pi e^3 - \pi \lim \frac{2t+8}{e^t}$$

$$\underset{(H)}{=} 2\pi e^3 - \pi \lim \underbrace{\frac{2}{e^t}}_{\to 0} = 2\pi e^3$$

3) $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}-6e^{x}+5\right)^2=\ln\left|e^{2x}-6e^{x}+5\right|$

C.E. $e^{2x}-6e^{x}+5\neq 0 \iff e^{x}\neq\frac{6\pm 4}{2} \iff e^{x}\neq 5$ et $e^{x}\neq 1$

$\iff x\neq \ln 5$ et $x\neq \ln 1=0$

dom $f=\mathbb{R}-\{0;\ln 5\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)= "\ln|1-6+5|"="\ln 0"=-\infty$ A.V. $x=0$

$\lim\limits_{x\to \ln 5} f(x)= "\ln|25-6\cdot 5+5|"="\ln 0"=-\infty$ A.V. $x=\ln 5$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)= "\ln|0-6\cdot 0+5|"=\ln 5$ A.H. $y=\ln 5$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim \ln\left(e^{2x}\cdot\left|1-6e^{-x}+5e^{-2x}\right|\right)$

$=\lim\left(\underbrace{2x}_{\to+\infty}+\ln\left|1-\underbrace{6e^{-x}+5e^{-2x}}_{\to 0}\right|\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\left(2+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\ln\left|1-\underbrace{6e^{-x}+5e^{-2x}}_{\to 0}\right|\right)=2$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim \ln\left|1-\underbrace{6e^{-x}+5e^{-2x}}_{\to 0}\right|=0 \Rightarrow$ A.O. $y=2x$

$f'(x)=\frac{2e^{2x}-6e^{x}}{e^{2x}-6e^{x}+5}=\frac{2e^{x}(e^{x}-3)}{e^{2x}-6e^{x}+5}=0 \iff x=\ln 3$

signe de $f'(x)$: $e^{2x}-6e^{x}+5>0 \iff e^{x}<1$ ou $e^{x}>5$

$\iff x<0$ ou $x>\ln 5$

$e^{x}-3>0 \iff x>\ln 3$

x		0		$\ln 3$		$\ln 5$	
$e^{x}-3$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$e^{2x}-6e^{x}+5$	$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$\ln 5 \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	$2\ln 2$	$\searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

$f(\ln 3)=\ln|9-6\cdot 3+5|=\ln 4=2\ln 2$

$\cap Ox$ $f(x)=0 \iff \left|e^{2x}-6e^{x}+5\right|=1$

$\iff e^{2x}-6e^{x}+5=1$ ou $e^{2x}-6e^{x}+5=-1$

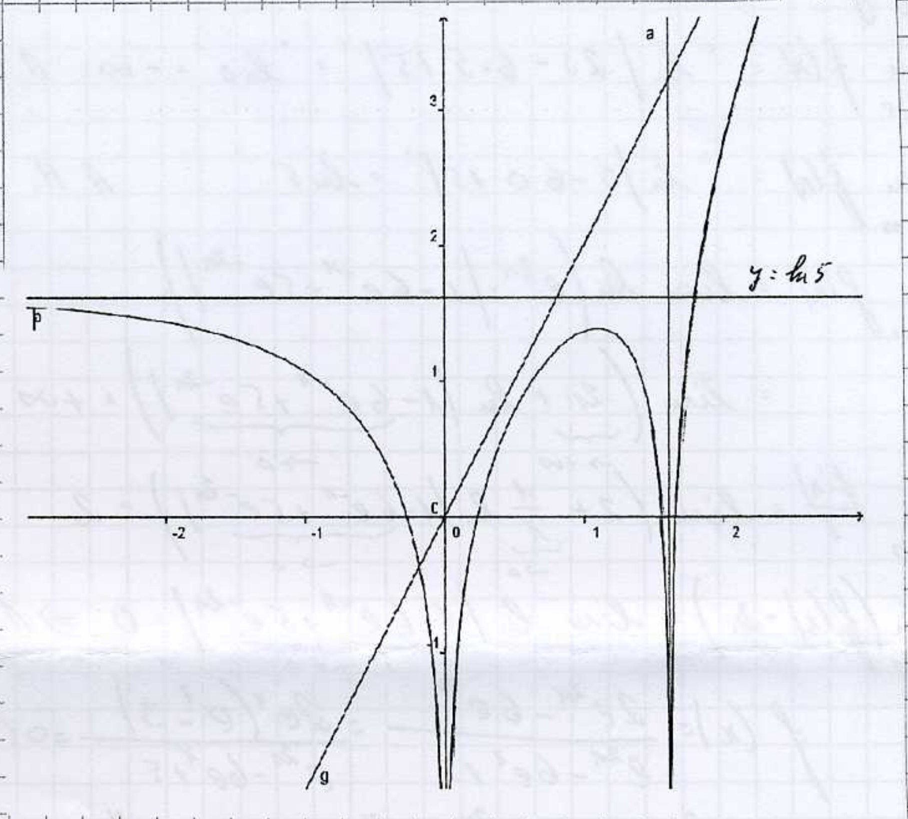
$\iff e^{2x}-6e^{x}+4=0$ ou $e^{2x}-6e^{x}+6=0$

$e^{2x}-6e^{x}+4=0$ $\quad \Delta=20$ $\quad e^{x}=\frac{6\pm2\sqrt{5}}{2}=3\pm\sqrt{5}$

$x=\ln(3+\sqrt{5})\simeq1,66$ ou $x=\ln(3-\sqrt{5})\simeq-0,22$

$e^{2x}-6e^{x}+6=0$ $\quad \Delta=12$ $\quad e^{x}=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{2}=3\pm\sqrt{3}$

$x=\ln(3+\sqrt{3})\simeq1,55$ ou $x=\ln(3-\sqrt{3})\simeq0,24$



$f(x)=m$ $\quad m\geq\ln5$ $\quad$ 1 racine $x_0>\ln5$

$2\ln2<m<\ln5$ $\quad$ 2 racines $x_0>\ln5$ et $x_1<0$

$m=2\ln2$ $\quad$ 3 racines $x_0=\ln3$ et $x_1<0$ et $x_2>\ln5$

$m<2\ln2$ $\quad$ 4 racines $x_0<0$ et $0<x_1<\ln3$

et $\ln3<x_2<\ln5$ et $x_3>\ln5$

Problem solving Corrigé

bateau à voile : vitesse constante $v_0 = 160$ m/min

bateau à moteur. $v(t) = 960\, e^{-t} - 960\, e^{-2t}$ $(t \geq 0)$ | t en min, $v(t)$ en m/min

Partie A

1) $\forall t \in \mathbb{R}^+ : v'(t) = -960\, e^{-t} + 1920\, e^{-2t}$

$v'(t) = 0 \iff t = \ln 2 \simeq 0{,}69$

t	0		$\ln 2$		5
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
v		$\nearrow$	M	$\searrow$	

$M = v(\ln 2) = 240$

La vitesse la plus élevée du bateau à moteur pendant les 5 premières minutes est de 240 m/min

2) $\forall t \in \mathbb{R}^+ : v''(t) = 960\, e^{-t} - 3840\, e^{-2t}$

$v''(t) = 0 \iff t = 2 \ln 2 \simeq 1{,}39$

t	0		$2\ln 2$		5
$v''(t)$		$-$	0	$+$	
v'		$\searrow$	m	$\nearrow$	

La vitesse du bateau décroît le plus rapidement après environ 1,4 minutes

3) $\forall t \in [0, 5] : v(t) \geq v_0 \iff \ln(3-\sqrt{3}) \leq t \leq \ln(3+\sqrt{3})$

$\ln(3+\sqrt{3}) - \ln(3-\sqrt{3}) \simeq 1{,}31$

Le bateau à moteur se déplace plus rapidement que le bateau à voile pendant environ 1,3 minutes

5

Partie B

1) $s_m(t) = \int_0^t v(x)\,dx$
$= -960\,e^{-t} + 480\,e^{-2t} + 480$

$\lim\limits_{t \to +\infty} s_m(t) = 480$
D'après ce modèle, la distance parcourue par le bateau à moteur ne dépasse donc pas 500 m.

2) $s_v(t) = 160t$

3) $\forall t \in \mathbb{R}^+ : s_m(t) \geq s_v(t)$
$\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 0{,}58$ ou $t = 2{,}55$

Le bateau à moteur dépasse le bateau à voile après environ 0,6 minutes

4

Partie C

1) a) Équation de la tangente au graphe cartésien de v au point d'abscisse $t = t_0 = 2{,}55$.

$y - v(2{,}55) = v'(2{,}55)\,(t - 2{,}55)$

$\Leftrightarrow \quad y = -63{,}25\,t + 230{,}40$

Si $t \geq 2{,}55$, la vitesse du bateau à moteur est définie par :
$v_a(t) = -63{,}25\,t + 230{,}40$

b) $v_a(t) = 0 \Leftrightarrow t \simeq 3{,}64$
Le bateau à moteur s'arrête après environ 3,64 minutes

c) $d = \int_{2,55}^{3,64} (-63{,}25\,t + 230{,}40)\,dt \simeq 37{,}76$

La distance parcourue par le bateau à moteur entre t_0 et l'instant d'arrêt est de 37,76 m.

2) a) $v_b(t) = mt + p$
En résolvant le système $\begin{cases} v_b(t_1) = 0 \\ v_b(2{,}55) = 160 \end{cases}$, on obtient $m = \dfrac{160}{2{,}55 - t_1}$ et $p = -\dfrac{160\,t_1}{2{,}55 - t_1}$, donc :
$v_b(t) = \dfrac{160}{2{,}55 - t_1} \cdot t + \dfrac{160\,t_1}{t_1 - 2{,}55}$

b) $\int_{2,55}^{t_1} v_b(t)\,dt = 37{,}76 \Leftrightarrow t_1 \simeq 3{,}022$

6 Le bateau à voile s'arrête après environ 3 minutes.